علی عمران _ تکلیف ۴

۱_

الف) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)^2 - x^2}{x(x-1)}}$ ← مخرج مشترک

$\Rightarrow \dfrac{-2x+1}{x(x-1)}$ ← $\begin{array}{c|ccc} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline & + \quad - & + & - \end{array}$ $D_f = (-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, 1)$

ب) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x}}{\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}}$ $\Rightarrow x \neq -1, 0$ ؛ $\Rightarrow x \neq 1, -2$

$\Rightarrow$ مخرج $\neq 0 \Rightarrow \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} \neq 0 \Rightarrow \dfrac{3x+6+x-1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{4x+5}{(x-1)(x+2)} \neq 0$

$\begin{array}{cccc} -2 & -\frac{5}{4} & 1 & \\ - \quad + & - & + & \end{array}$ $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, -\frac{5}{4}, -1, 0, 1\}$

۲_

الف) $f(x) = \sqrt{(3^{-x} - 3^2)(2^5 - 2^{2x})}$

$x = -2$ $\quad$ $x = \frac{5}{2}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} -2 & \frac{5}{2} & \\ + \quad - & + & \end{array}$

$D_f = (-\infty, -2] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$

ب) $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt{y+1} = 3 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$D_f = [1, +\infty)$

۳-

$$f(x)=\log_{(x^2-x-2)} \frac{4}{\sqrt{x^2-1}+1}$$

$\Rightarrow x^2-x-2>0 \Rightarrow (x-2)(x+1)>0$ $\begin{array}{ccccc} & -1 & & 2 & \\ + & & - & & + \end{array}$

مخرج کسر $x^2-1>0 \Rightarrow (x-1)(x+1)>0$ $\begin{array}{ccccc} & -1 & & 1 & \\ + & & - & & + \end{array}$ $\cap$

$D_f=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

۴-

$f(x)=\sqrt{-x^2+ax+3}$

چون تابع منفیم داده است: پس فاصله بین دو ریشه عبارت را مثبت می‌کند
پس یکی از ریشه‌ها ۲- و دیگری b است

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -3 \Rightarrow b=\frac{3}{2} \Rightarrow$

$\alpha+\beta = \frac{-a}{-1} = \frac{a}{1} = \frac{3}{2}+(-2) = \frac{-1}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$a+b = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

۵ـ

$$x<1 \qquad x\geq 1$$

$$3x+3-x \Leftarrow x+3 \;\Big|\; 3x-3 \qquad 3x-3\geq 0$$

$$\downarrow \qquad 3x\geq 3 \Rightarrow x\geq 1$$

$$x+3>0 \qquad 3x-3-x$$

$$\Rightarrow x>-3$$

$$D_f=(-3,1)\cup[1,+\infty)$$

۶ـ

$$f(a)=7(1+a)=7+7a$$

$$f(-2)=-4+3a$$

$$\Rightarrow 2f(a)=f(-2)+a \Rightarrow 2(7+7a)=-4+3a+a$$

$$\Rightarrow 14+14a=-4+4a \Rightarrow 10=-10a \Rightarrow a=-1$$

۷ـ

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+2 \Rightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}+2$$

$$=\sqrt{x+2+\frac{1}{x}}+2 \Rightarrow f(2+\sqrt{3})=\sqrt{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2}+2=2+\sqrt{6}$$

$$f(2-\sqrt{3})=\sqrt{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2}+2=2+\sqrt{6}$$

$$f(2-\sqrt{3})+f(2+\sqrt{3})=2+\sqrt{6}+2+\sqrt{6}=4+2\sqrt{6}$$

۸ -

$$(۲f(x) - ۳f(-x) = ۴x^۲ - x) \times ۲$$

$$(۲f(-x) - ۳f(x) = ۴x^۲ + x) \times ۳$$

$$\to ۴f(x) - ۶f(-x) = ۸x^۲ - ۲x$$

$$+ \to ۶f(-x) - ۹f(x) = ۱۲x^۲ + ۳x$$

$$-۵f(x) = ۲۰x^۲ + x$$

$$\to f(x) = \frac{۲۰x^۲ + x}{-۵}$$

---

۹ -

اگر $x = ۰ \to ۲f(۰) = ۳m - ۱$

اگر $x = -۲ \to ۶f(۰) = ۱۶ + ۲m + ۳m - ۱$

$$۹m - ۳ \qquad = ۵m + ۱۵$$

$$\cancel{(۳m - ۱) \times ۳} = ۵m + ۱۵ \to ۴m = ۱۸ \to m = \frac{۹}{۲}$$

$$۲f(۰) = ۳\left(\frac{۹}{۲}\right) - ۱ = \frac{۲۵}{۲} \to f(۰) = \frac{۲۵}{۴}$$

---

۱۰ -

اگر $x = -۱ \to ۲f(-۱) = \frac{۳ + ۱۲ + ۳}{-۱} = -۱۸$

$$f(-۱) = -۹$$