۱۹٫۵

تکلیف شماره : ۴

نام و نام خانوادگی : ابوالفضل ابوفاضلی .

الف) $\frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}\geq ۰ \longrightarrow \frac{\cancel{x^۲}-۲x+۱-\cancel{x^۲}}{x(x-۱)}\geq ۰ \longrightarrow \frac{۱-۲x}{x(x-۱)}\geq ۰$ $\begin{array}{ccccccc} & ۰ & & \frac{۱}{۲} & & ۱ & \\ + & \underset{ن ق}{|} & - & | & + & \underset{ن ق}{|} & - \end{array}$ ②

$\Longrightarrow \boxed{D_f=(-\infty,۰)\cup[\frac{۱}{۲},۱)}$ ✓

ب) $\begin{cases} x+۱\neq ۰ \to x\neq -۱ \\ x\neq ۰ \\ x-۱\neq ۰ \to x\neq ۱ \\ x+۲\neq ۰ \to x\neq -۲ \end{cases}$ $\frac{۳}{x-۱}+\frac{۱}{x+۲}\neq ۰ \Longrightarrow \frac{۳x+۶+x-۱}{(x-۱)(x+۲)}\neq ۰ \Longrightarrow \frac{۴x+۵}{(x-۱)(x+۲)}\neq ۰$ ۱

$\Longrightarrow ۴x+۵\neq ۰ \Longrightarrow x\neq \frac{-۵}{۴}$ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۰,۱,-۲,-\frac{۵}{۴}\}}$ ✓

الف) $\left((\frac{۱}{۳})^x-۹\right)\left(۳۲-۴^x\right)\geq ۰ \xrightarrow{ریشه‌ها} \begin{cases} x=\frac{۵}{۲} \\ x=-۲ \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & -۲ & & ۲٫۵ & \\ + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow D_f=\boxed{(-\infty,-۲]\cup[۲٫۵,+\infty)}$ ✓ ②

ب) $\sqrt[۴]{x-۱}+\sqrt{y+۱}=۳ \longrightarrow \begin{cases} \sqrt[۴]{x-۱}\geq ۰ \to x-۱\geq ۰ \to x\geq ۱ \\ \sqrt{y+۱}\geq ۰ \to y+۱\geq ۰ \to y\geq -۱ \end{cases}$ ۲

$\sqrt{y+۱}=۳-\sqrt[۴]{x-۱} \xrightarrow{\sqrt{y+۱}\geq ۰} ۳-\sqrt[۴]{x-۱}\geq ۰ \Longrightarrow \sqrt[۴]{x-۱}\leq ۳ \Longrightarrow \sqrt{x-۱}\leq ۹ \Longrightarrow x-۱\leq ۸۱ \Longrightarrow x\leq ۸۲$

$\xrightarrow{اشتراک} ۱\leq x\leq ۸۲ \Longrightarrow \boxed{D_f=[۱,۸۲]}$ ✓

(I) $(x-۲)(x+۱)>۰ \to \begin{array}{ccccc} & -۱ & & ۲ & \\ + & | & - & | & + \end{array}$ ②

(II) $\sqrt{(x-۱)(x+۱)}+۱\neq ۰$ همواره برقرار ✓

(III) $\sqrt{(x-۱)(x+۱)}\geq ۰ \Longrightarrow (x-۱)(x+۱)\geq ۰ \to \begin{array}{ccccc} & -۱ & & ۱ & \\ + & | & - & | & + \end{array}$ ۳

$\text{I}\cap\text{II}\cap\text{III} \Longrightarrow \boxed{D_f=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)}$ ✓

$-x^۲+ax+۳\geq ۰ \longrightarrow D_f=[-۲,b]$ $\xrightarrow{\alpha,\beta\ =\ ریشه‌های معادله}$

$-x^۲+ax+۳=a'(x-\alpha)(x-\beta) \xrightarrow[\alpha=-۲]{a'=-۱} -(x+۲)(x-\beta)=-x^۲+(\beta-۲)x+۲\beta$ ۱٫۵

$\Longrightarrow \begin{cases} \beta-۲=a \\ ۲\beta=۳ \to \beta=۱٫۵ \end{cases} \Longrightarrow a=۱٫۵-۲=-\frac{۱}{۲} \Longrightarrow$ معادله : $-x^۲-\frac{۱}{۲}x+۳$ ۴

$\boxed{a=-\frac{۱}{۲}}$ دقت !

$\Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{\frac{۱}{۲}\pm\sqrt{\frac{۱}{۴}+۱۲}}{-۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\pm\frac{۷}{۲}}{-۲}$ $\begin{cases} -۲ \\ +\frac{۳}{۲} \end{cases} \longrightarrow \boxed{b=+\frac{۳}{۲}}$ $-\frac{۱}{۲}+(-\frac{۳}{۲})=۱$

$f(x)-x\geq ۰ \Longrightarrow f(x)\geq x$ ②

$f(x)=\begin{cases} ۳x-۲\ ; & x\geq ۱ \\ ۲x+۳\ ; & x<۱ \end{cases}$ $\begin{array}{l} \Longrightarrow ۳x-۲\geq x \Longrightarrow ۲x\geq ۲ \Longrightarrow x\geq ۱ \\ \Longrightarrow ۲x+۳\geq x \Longrightarrow x\geq -۳ \end{array}$ ۵

همواره برقرار است ✓

$\boxed{D_f=[-۳,+\infty)}$ ✓

$f(x)=\begin{cases}(a+1)(x+۲)\;;\; x>۱ \longrightarrow f(۵)=۷a+۷\\ ۳a+۲x\;;\; x\leq ۱ \longrightarrow f(-۲)=۳a-٤\end{cases}$ ۲

$۲f(۵)=f(-۲)+a \Longrightarrow ۲(۷a+۷)=(۳a-٤)+a \Longrightarrow ۱٤a+۱٤=۳a-٤+a$ ۶

$\Longrightarrow ۱۰a=-۱۸ \Longrightarrow a=\frac{-۱۸}{۱۰}=\boxed{-۱/۸}$ ✓

$f(x)=\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}+۲$ $\qquad \sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=۱ \Longrightarrow$ معکوس $\Longrightarrow \sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}$ ۲

$f(۲-\sqrt{۳})=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}+۲$

$f(۲+\sqrt{۳})=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+۲$

$\xrightarrow{\oplus} \underbrace{\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right)+۲}_{f(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})}+\underbrace{\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right)+۲}_{f(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})}$ ۷

$=۲\big(\underbrace{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}_{A}\big)+٤$ $\;/\; A^۲=۲+\cancel{\sqrt{۳}}+۲-\cancel{\sqrt{۳}}+۲(۱)=۶ \Longrightarrow A=\sqrt{۶}$

$\Longrightarrow ۲(\sqrt{۶})+٤=\boxed{۲\sqrt{۶}+٤}$ ✓

$x'=x \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases}۲f(x)-۳f(-x)=٤x^۲-x\\ ۲f(-x)-۳f(x)=٤x^۲+x\end{cases}$

$x'=-x \xrightarrow{\times ۳}$ $\;\xrightarrow{\oplus}\; \begin{cases}٤f(x)-۶f(-x)=۸x^۲-۲x\\ ۶f(-x)-۹f(x)=۱۲x^۲+۳x\end{cases}$ ۲

$-۵f(x)=۲۰x^۲+x$ ۸

$\boxed{f(x)=\frac{۲۰x^۲+x}{-۵}}$ ✓

$(x+۲)f(x)-۳x\,f(x+۲)=٤x^۲-mx+۳m-۱$

$\xrightarrow{x=۰} ۲f(۰)=-۱+۳m \Longrightarrow f(۰)=\frac{۳m-۱}{۲}$ $\;\longrightarrow\; \frac{۳m-۱}{۲}=\frac{۵m+۱۵}{۶} \Longrightarrow ۹m-۳=۵m+۱۵$ ۲

$\xrightarrow{x=-۲} ۶f(۰)=۱۶+۲m+۳m-۱ \Longrightarrow f(۰)=\frac{۵m+۱۵}{۶}$ ۹

$\Longrightarrow ٤m=۱۸ \Longrightarrow m=\frac{۱۸}{٤}=٤/۵$ ✓ $\qquad f(۰)=\frac{۳m-۱}{۲}=\frac{۳(٤/۵)-۱}{۲}=\frac{۱۳/۵-۱}{۲}=\boxed{۶/۲۵}$ ✓

$ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x} \Longrightarrow \frac{ax^۲+۲bx+a}{x}=\frac{۳x^۲+۲bx+a}{x} \Longrightarrow \begin{cases}a=۳\\ b=-۶\end{cases}$ ۲

$f(x)=ax+b=۳x-۶ \Longrightarrow f(-۱)=-۳-۶=\boxed{-۹}$ ✓ ۱۰