نام و نام خانوادگی : ابوالفضل ابوفاضلی .　　　　تکلیف شماره : ۴

۱

الف) $\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}\geqslant 0 \longrightarrow \frac{\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}}{x(x-1)}\geqslant 0 \longrightarrow \frac{1-2x}{x(x-1)}\geqslant 0$

$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & \frac{1}{2} & & 1 & \\ + & | & - & | & + & | & - \end{array}$

$\Longrightarrow D_f=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},1)$

ب) $\begin{cases} x+1\neq 0 \longrightarrow x\neq -1 \\ x\neq 0 \\ x-1\neq 0 \longrightarrow x\neq 1 \\ x+2\neq 0 \longrightarrow x\neq -2 \end{cases}$

$\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}\neq 0 \Longrightarrow \frac{3x+6+x-1}{(x-1)(x+2)}\neq 0 \Longrightarrow \frac{4x+5}{(x-1)(x+2)}\neq 0$

$\Longrightarrow 4x+5\neq 0 \Longrightarrow x\neq \frac{-5}{4}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{-1,0,1,-2,-\frac{5}{4}\}$

۲

الف) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x-9\right)\left(32-4^x\right)\geqslant 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=-2 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & -2 & & 2/5 & \\ + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow D_f=(-\infty,-2]\cup[2/5,+\infty)$

ب) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{y+1}=3 \longrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x-1}\geqslant 0 \longrightarrow x-1\geqslant 0 \longrightarrow x\geqslant 1 \\ \sqrt{y+1}\geqslant 0 \longrightarrow y+1\geqslant 0 \longrightarrow y\geqslant -1 \end{cases}$

$\sqrt{y+1}=3-\sqrt[4]{x-1} \xrightarrow{\sqrt{y+1}\geqslant 0} 3-\sqrt[4]{x-1}\geqslant 0 \Longrightarrow \sqrt[4]{x-1}\leqslant 3 \Longrightarrow \sqrt{x-1}\leqslant 9 \Longrightarrow x-1\leqslant 81 \Longrightarrow x\leqslant 82$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 1\leqslant x\leqslant 82 \Longrightarrow D_f=[1,82]$

۳

(I) $(x-2)(x+1)>0 \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & -1 & & 2 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$

(II) $\sqrt{(x-1)(x+1)}+1\neq 0$ همواره برقرار ✓

(III) $\sqrt{(x-1)(x+1)}\geqslant 0 \Longrightarrow (x-1)(x+1)\geqslant 0 \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & -1 & & 1 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$

$\xRightarrow{I\cap II\cap III} D_f=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

۴

$-x^2+ax+3\geqslant 0 \longrightarrow D_f=[-2,b] \quad \xrightarrow{\alpha,\ \beta = \text{ریشه‌های معادله}}$

$-x^2+ax+3=a'(x-\alpha)(x-\beta) \xrightarrow[\alpha=-2]{a'=-1} -(x+2)(x-\beta)=-x^2+(\beta-2)x+2\beta$

$\Longrightarrow \begin{cases} \beta-2=a \\ 2\beta=3 \rightarrow \beta=1/5 \end{cases} \Longrightarrow a=1/5-2=-\frac{1}{2} \Longrightarrow$ معادله : $-x^2-\frac{1}{2}x+3$ $\quad a=-\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}}{-2}=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}}{-2} \begin{cases} -2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow b=-\frac{3}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2}+(-\frac{3}{2})=-2$

۵

$f(x)-x\geqslant 0 \Longrightarrow f(x)\geqslant x$

$f(x)=\begin{cases} 3x-2\ ;\ x\geqslant 1 \Longrightarrow 3x-2\geqslant x \Longrightarrow 2x\geqslant 2 \Longrightarrow x\geqslant 1 \\ 2x+3\ ;\ x<1 \Longrightarrow 2x+3\geqslant x \Longrightarrow x\geqslant -3 \end{cases}$ همواره برقرار است ✓

$D_f=[-3,+\infty)$

$f(x)=\begin{cases}(a+۱)(x+۲)\,; & x>۱ \\ ۳a+۲x\,; & x\leq ۱\end{cases}$ $\longrightarrow f(۵)=۷a+۷$, $\longrightarrow f(-۲)=۳a-۴$

$۲f(۵)=f(-۲)+a \Longrightarrow ۲(۷a+۷)=(۳a-۴)+a \Longrightarrow ۱۴a+۱۴=۳a-۴+a$ ۶

$\Longrightarrow ۱۰a=-۱۸ \Longrightarrow a=\frac{-۱۸}{۱۰}=-۱٫۸$

$f(x)=\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}+۲$ $\qquad \sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=۱ \Longrightarrow$ معکوس $\Longrightarrow \sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}$

$f(۲-\sqrt{۳})=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}+۲$

$f(۲+\sqrt{۳})=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+۲$

$\xrightarrow{+} \underbrace{\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right)+۲}_{f(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})}+\underbrace{\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right)+۲}_{f(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})}$ ۷

$=۲\Big(\underbrace{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}_{A}\Big)+۴ \quad / \quad A^۲=۲+\cancel{\sqrt{۳}}+۲-\cancel{\sqrt{۳}}+۲(۱)=۶ \Longrightarrow A=\sqrt{۶}$

$\Longrightarrow ۲(\sqrt{۶})+۴=۲\sqrt{۶}+۴$

$x'=x \xrightarrow{\times ۲} ۲f(x)-۳f(-x)=۴x^۲-x$

$x'=-x \xrightarrow{\times ۳} ۲f(-x)-۳f(x)=۴x^۲+x$

$\longrightarrow \xrightarrow{+} \begin{cases}۴f(x)-۶f(-x)=۸x^۲-۲x \\ ۶f(-x)-۹f(x)=۱۲x^۲+۳x\end{cases}$

$-۵f(x)=۲۰x^۲+x$ ۸

$f(x)=\frac{۲۰x^۲+x}{-۵}$

$(x+۲)f(x)-۳x\,f(x+۲)=۴x^۲-mx+۳m-۱$

$x=۰$: $۲f(۰)=-۱+۳m \Longrightarrow f(۰)=\frac{۳m-۱}{۲}$

$x=-۲$: $۶f(۰)=۱۶+۲m+۳m-۱ \Longrightarrow f(۰)=\frac{۵m+۱۵}{۶}$

$\longrightarrow \frac{۳m-۱}{۲}=\frac{۵m+۱۵}{۶} \Longrightarrow ۹m-۳=۵m+۱۵$ ۹

$\Longrightarrow ۴m=۱۸ \Longrightarrow m=\frac{۱۸}{۴}=۴٫۵$

$f(۰)=\frac{۳m-۱}{۲}=\frac{۳(۴٫۵)-۱}{۲}=\frac{۱۳٫۵-۱}{۲}=۶٫۲۵$

$ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x} \Longrightarrow \frac{ax^۲+۲bx+a}{x}=\frac{۳x^۲+۲bx+a}{x} \Longrightarrow \begin{cases}a=۳ \\ b=-۶\end{cases}$

$f(x)=ax+b=۳x-۶ \Longrightarrow f(-۱)=-۳-۶=-۹$ ۱۰