تشریحی تکلیف ۴ کلاس دوشنبه‌ها

سوال ۱-

الف) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x}{x-1}}$

$$\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}\geq 0 \qquad \frac{(x-1)^2-x^2}{x(x-1)}\geq 0 \qquad \frac{(x-1-x)(x-1+x)}{x(x-1)}\geq 0 \Rightarrow \frac{-(2x-1)}{x(x-1)}\geq 0$$

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
	$+$	∄	$-$	0	$+$	∄	$-$

$$D_f=(-\infty,0)\cup\left[\tfrac{1}{2},1\right)$$

ب) $$f(x)=\frac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}}=\frac{\dfrac{x-2(x+1)}{x(x+1)}}{\dfrac{3(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)}}=\frac{\dfrac{-x-2}{x(x+1)}}{\dfrac{4x+5}{(x-1)(x+2)}}$$

$$x(x+1)=0 \rightsquigarrow x=0,-1$$
$$4x+5=0 \rightsquigarrow x=\frac{-5}{4}$$
$$(x-1)(x+2) \rightsquigarrow x=1,-2$$
$$D_f=\mathbb{R}-\left\{0,-1,-\frac{5}{4},1,-2\right\}$$

سوال ۲-

الف) $f(x)=\sqrt{\underbrace{\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^x-9\right)}_{\text{به ازای x ها بالاتر از ریشه منفی}}\underbrace{\left(32-4^x\right)}_{\text{به ازای x های بالاتر از ریشه منفی}}}$

سمت راست ریشه‌های بزرگتر مثبت

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^x=9 \Rightarrow x=-2$$
$$32=4^x \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

x		-2		$\frac{5}{2}$	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f=(-\infty,-2]\cup\left[\tfrac{5}{2},+\infty\right)$$

ب) $$\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{y+1}=3 \qquad x-1\geq 0 \quad x\geq 1 \quad \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+1}=3-\sqrt[4]{x-1} \Rightarrow 3-\sqrt[4]{x-1}\geq 0 \qquad \sqrt[4]{x-1}\leq 3 \qquad x-1\leq 81$$
$$x\leq 82 \quad \mathrm{II}$$

$$\xrightarrow[\cap]{\mathrm{I},\,\mathrm{II}} 1\leq x\leq 82 \Rightarrow D_f=[1,82]$$

سوال ۳ -

$$f(x)=\frac{\log^{(x^۲-x-۲)}}{\sqrt{x^۲-۱}+۱} \Rightarrow \sqrt{x^۲-۱}+۱ \neq ۰ \quad \sqrt{x^۲-۱} \neq -۱$$ ✓ همواره برقرار

$$\log^{x^۲-x-۲} \Rightarrow x^۲-x-۲>۰ \quad (x-۲)(x+۱)>۰$$

x	-۱		۲	
$+$	۰	$-$	۰	$+$

$(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ I

$x^۲-۱\geq ۰ \quad x^۲\geq ۱ \quad \begin{cases} x\geq ۱ \\ x\leq -۱ \end{cases}$ II

$(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

$\mathrm{I}\cap\mathrm{II} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$$

سوال ۴ -

$$\sqrt{۳+ax-x^۲} \longrightarrow D_f=[-۲,b] \longrightarrow$$

عبارت درجه ۲ وقتی این شکلی دامنه دارد یعنی ۲ ریشه دارد و علامت بین ۲ ریشه + بود

a و c مختلف العلامت پس این عبارت همواره ریشه دارد!

$$\xRightarrow{x=-۲} ۳+a(-۲)-(-۲)^۲=۰ \quad ۲a=-۱ \Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=-\frac{(-\frac{۱}{۲})}{-۱}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲+b=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow a+b=(-\tfrac{۱}{۲})+(\tfrac{۳}{۲})=۱$$

سوال ۵ -

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۲ \ ; \ x\geq ۱ \\ ۲x+۳ \ ; \ x<۱ \end{cases} \qquad g(x)=\sqrt{f(x)-x} \Rightarrow f(x)-x\geq ۰ \Rightarrow f(x)\geq x$$

$۳x-۲\geq x \Rightarrow ۲x\geq ۲ \Rightarrow x\geq ۱ \ ; \ x\geq ۱ \longrightarrow$ ✓ همواره برقرار

$۲x+۳\geq x \Rightarrow x\geq -۳ \ ; \ x<۱ \Rightarrow -۳\leq x<۱ \Rightarrow D_g=[-۳,+\infty)$

سوال ۶ -

$$f(x)=\begin{cases} (a+۱)(x+۲) \ ; \ x>۱ \\ ۳a+۲x \ ; \ x\leq ۱ \end{cases}$$

$$۲f(۵)=f(-۲)+a$$

$$۲(a+۱)(\underbrace{۵+۲}_{۷})=۳a+۲(-۲)+a$$

$$۱۴a+۱۴=۳a-۴+a \Rightarrow ۱۰a=-۲۸ \Rightarrow \boxed{a=-۲/۸}$$

سوال ۷ -

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}+۲$$

$$f(۲-\sqrt{۳})+f(۲+\sqrt{۳}) \qquad \frac{۱}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{\underbrace{\sqrt{۴-۳}}_{۱}}$$

$$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}+۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+۲ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\times\dfrac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}} \\ =\dfrac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\underbrace{\sqrt{۴-۳}}_{۱}}= \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+۲\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+۴ =$$

$$\sqrt{۲}\left(\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}\right)+۴$$

$$\sqrt{۲}\left(\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^۲}+\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲}\right)+۴=\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۱+\sqrt{۳}-۱)+۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}(۲\sqrt{۳})+۴=۲\sqrt{۶}+۴=۲(\sqrt{۶}+۲)$$

سوال ۸

$$\begin{cases} ۲f(x)-۳f(-x)=۴x^2-x \xrightarrow{\times ۲} ۴f(x)-۶f(-x)=۸x^2-۲x \\ ۲f(-x)-۳f(x)=۴x^2+x \xrightarrow{\times -۳} -۶f(-x)+۹f(x)=-۱۲x^2-۳x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۶f(-x)=-۱۲x^2-۳x-۹f(x)$$

$$\Rightarrow ۴f(x)-۱۲x^2-۳x-۹f(x)=۸x^2-۲x \Rightarrow -۵f(x)=۲۰x^2+x$$

$$f(x)=-۴x^2-\frac{x}{۵}$$

سوال ۹

$$(x+۲)f(x)-۳x\,f(x+۲)=۴x^2-mx+۳m-۱$$

$$\xrightarrow{x=۰} ۲f(۰)-۳(۰)f(۲)=۴(۰)^2-m(۰)+۳m-۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲f(۰)=۳m-۱ \\ ۶f(۰)=۳۲+۲m+۳m-۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=-۲} (-۲+۲)f(-۲)-۳(-۲)f(-۲+۲)=۴(-۲)^2-m(-۲)+۳m-۱ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ۶f(۰)=۳۲+۲m+۲f(۰) \quad ۴f(۰)=۳۲+۲m \Rightarrow \begin{cases} ۲f(۰)=۱۶+m \\ ۲f(۰)=۳m-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۶+m=۳m-۱ \Rightarrow ۲m=۱۷ \Rightarrow ۴f(۰)=۳۲+۱۷ \Rightarrow f(۰)=\frac{۴۹}{۴}$$

سوال ۱۰

$$f(x)+f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۳x^2-۱۲x+۳}{x} \qquad f(-۱)=?$$

$$ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{ax^2+bx+a+bx}{x}=\frac{ax^2+۲bx+a}{x}=\frac{۳x^2-۱۲x+۳}{x} \xRightarrow{\text{تغییر قرار داریم}} \boxed{a=۳} \quad ۲b=-۱۲ \Rightarrow \boxed{b=-۶}$$

$$\Rightarrow y=۳x-۶ \xRightarrow{x=-۱} y=۳(-۱)-۶=-۹$$