

۱۹.۵

$f(n) = \begin{cases} \cot \frac{\pi n}{4} & ; n \leq 1 \\ \sqrt{n^2 + 1} & ; n > 1 \end{cases}$ $f \circ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ $\rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \cot \frac{\pi}{4} = \cot 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3} > 1$ $\rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2 \checkmark$	۱
الف) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n-1}{n^2}}$, $g(n) = 2 \cos^2 n$ $f \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2-1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ب) $f(n) = [n]$, $g(n) = \frac{n}{1-n}$ $f \circ g(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2}))$ $\rightarrow g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{-1} = -2-\sqrt{2} \rightarrow f(-2-\sqrt{2}) = [-2-\sqrt{2}] = -3 \checkmark$	۲
$f(n) = \sin n$, $g(n) = n \sqrt{1-n^2}$ $g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\rightarrow g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ $\rightarrow = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \checkmark$	۳
$f(n) = \{(4,5)(4,6)(8,12)(10,12)\}$, $g(n) = \{(4,4)(2,4)(4,8)(8,10)\}$ الف) $f \circ g(n) = f(g(n)) = \{(4,5)(2,5)(4,12)(8,12)\}$ ✓ ب) $g \circ f(n) = g(f(n)) = \{(4,4)(2,4)(4,8)(8,10)\}$ ✓ ج) $f \circ f(n) = f(f(n)) = \{(4,5)(4,6)(8,12)(10,12)\}$ ✓ د) $g \circ g(n) = g(g(n)) = \{(4,8)(2,4)(4,10)(8,10)\}$ ✓	۴
$f = \{(2,1)(3,2)(4,5)(1,7)\}$, $g = \{(1,2)(3,1)(4,3)(1,5)\}$ $(4,1) \in f \circ g \rightarrow f \circ g(4) = 2 \rightarrow f(g(4)) = 2 \rightarrow g(4) = 3$ $\rightarrow (a,3) = (4,3) \rightarrow a = 4$ $(4,1) \in g \circ f \rightarrow g \circ f(4) = 1 \rightarrow g(f(4)) = 1 \rightarrow g(5) = 1$ $\rightarrow (b,1) = (5,1) \rightarrow b = 5$ $\rightarrow (a,b) = (4,5) \checkmark$	۵

$f(f(n)) = fn + 3$ $g(2n+3) = 3n - 2$ $g \circ f(-1) = ?$ $\rightarrow f(n) = an + b \rightarrow f(f(n)) = a(an+b) + b = a^2n + ab + b$ $\rightarrow a^2n + ab + b = fn + 3 \rightarrow a^2 = f, a = \pm 2 \begin{cases} a=2, b=1 \\ a=-2, b=-3 \end{cases}$ $\rightarrow f(n) = 2n+1$ (if $n=-1 \rightarrow$ هر دو -1 می شود) $\rightarrow f(-1) = -1$ $\rightarrow g(n) = cn + d \rightarrow g(2n+3) = c(2n+3) + d = 2cn + 3c + d = 3n - 2$ $\rightarrow c = \frac{3}{2} \text{ و } d = -\frac{13}{2} \rightarrow g(n) = \frac{3}{2}n - \frac{13}{2} \rightarrow g(-1) = -\frac{3}{2} - \frac{13}{2} = -8$	۶
$f(n) = \sqrt{n+1}$ $g(n) = \frac{1}{n^2-4n}$ $D_{g \circ f} = ?$ * دامنه تابع $g \circ f$ می شود اعدادی که می توانیم در تابع f قرار دهیم و عددی که بدست می آید را بتوان در تابع g قرار داد. $D_f = \mathbb{R} \rightarrow f(n) = \begin{cases} \text{if } n < 0 \rightarrow 0 \\ \text{if } n = 0 \rightarrow 0 \\ \text{if } n > 0 \rightarrow \sqrt{2n} \end{cases} \rightarrow R_f = [0, +\infty)$ $D_g = ? \rightarrow g(n) = \frac{1}{n(n-4)} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$ پس از بردن n و 4 ما کم می کنیم. (عوامل 0 و 4 ساز) یعنی اعداد منفی و صفر که تابع را صفر می کنند و عدد 4 که تابع را نمی گذارد حذف می کنیم و داریم: $D_{g \circ f} = (0, +\infty) - \{4\}$	۷
$f(n) = \sqrt{1-n^2}$ $g(n) = \sqrt{n}$ $D(f+g) \circ f = ?$ ابتدا باید برای قسمت $(f+g)$ دامنه مان برابر $D_f \cap D_g$ باشد و در آخر برد یا عددی که از این بدست می آید در دامنه f باشد. $\rightarrow D_f \cap D_g = [-1, 1] \cap [0, +\infty) = [0, 1]$ (بازه $[0, 1]$ باید جواب عضو $[-1, 1]$ در آید. در همه حالت ها بجای $n=0$ عدد 1 بیشتر می شود پس در دامنه f قرار نمی گیرند. $\rightarrow D(f+g) \circ f = [0, 1]$	۸
الف) $f\left(\frac{3n+1}{n-2}\right) = fn + 5 \rightarrow \frac{3n+1}{n-2} = t \rightarrow n = -\frac{-2t-1}{t-2} = \frac{2t+1}{t-2}$ $\rightarrow f(t) = 4\left(\frac{2t+1}{t-2}\right) + 5 = \frac{8t+4+5t-10}{t-2} = \frac{13t-6}{t-2}$ $\rightarrow f(n) = \frac{13n-6}{n-2}$ ب) $f\left(n + \frac{1}{n}\right) = n^3 + \frac{1}{n^3} \rightarrow \text{if } n + \frac{1}{n} = t \rightarrow t^3 = n^3 + \frac{1}{n^3} + 3\left(n + \frac{1}{n}\right) = n^3 + \frac{1}{n^3} + 3t$ $\rightarrow n^3 + \frac{1}{n^3} = t^3 - 3t \rightarrow f(t) = t^3 - 3t \rightarrow f(n) = n^3 - 3n$	۹
$f(n) = n\sqrt{n}$ $g(1) = 0$ $g(2\sqrt{2}) = 0$ $\rightarrow g \circ f(n) = 0 \rightarrow g(f(n)) = 0$ یعنی $f(n)$ یا باید 1 بشود یا $2\sqrt{2}$ ۱) $f(n) = 1 = n\sqrt{n} \rightarrow n^{\frac{3}{2}} = 1 \rightarrow n = 1$ ۲) $f(n) = 2\sqrt{2} = n\sqrt{n} \rightarrow n = 2$ اختلاف $= 2 - 1 = 1$	۱۰