یازدهم A آرین ملکیان ۱۹٫۵

۱-

$$fof\left(\frac{۲}{۳}\right) = f\left(f\left(\frac{۲}{۳}\right)\right) = f(\sqrt{۳}) = ۲ \Rightarrow fof\left(\frac{۲}{۳}\right) = ۲$$

$$f(x) = \begin{cases} \cot\frac{\pi x}{۴} & ; x \leq ۱ \\ \sqrt{x^۲+۱} & ; x > ۱ \end{cases} \xRightarrow{\frac{۲}{۳} \leq ۱} f\left(\frac{۲}{۳}\right) = \cot\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$$

$$\xRightarrow[\sqrt{۳} > ۱]{} f(\sqrt{۳}) = \sqrt{۴} = ۲$$

۲

---

۲) الف)

$$fog\left(\frac{\pi}{۳}\right) = f\left(g\left(\frac{\pi}{۳}\right)\right) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad fog\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$g(x) = ۲\cos^۲ x \xRightarrow{x=\frac{\pi}{۳}} ۲\cos^۲\frac{\pi}{۳} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}$$

$$f\left(\frac{۱}{x}\right) = \sqrt{\frac{۲x-۱}{۲x}} \xRightarrow[\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۲]{} f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲

ب)

$$fog(\sqrt{۲}) = f(g(\sqrt{۲})) = f(-۲-\sqrt{۲}) = -۴$$

$$g(x) = \frac{x}{۱-x} \xRightarrow{x=\sqrt{۲}} g(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})}{(۱-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})} = -(۲+\sqrt{۲}) = -۲-\sqrt{۲}$$

$$f(x) = [x] \xRightarrow{x=-۲-\sqrt{۲}} f(-۲-\sqrt{۲}) = [-۲-\sqrt{۲}] \underset{\sqrt{۲}\approx ۱٫۴}{=} [۳٫۴] = -۴$$

$$fog(\sqrt{۲}) = -۴$$

۳-

$$gof\left(\frac{\pi}{۴}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

۲

$$f(x) = \sin x \xRightarrow{x=\frac{\pi}{۴}} f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$g(x) = x\sqrt{۱-x^۲} \xRightarrow[x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}]{} g\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

$$gof\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۲}$$

۴،

الف)

$$fog(x) = \begin{cases} ۴ \to ۶ \to ۵ \\ ۲ \to ۴ \to ۵ \\ ۶ \to ۸ \to ۱۲ \\ ۸ \to ۱۰ \to ۱۲ \end{cases}$$

ب) $gof(x) = \varnothing$

$۴ \to ۵ \to \times$

$۶ \to ۵ \to \times$

$۸ \to ۱۲ \to \times$

$۱۰ \to ۱۲ \to \times$

ج) $fof(x) = \varnothing$

$۴ \to ۵ \to \times$

$۶ \to ۵ \to \times$

$۸ \to ۱۲ \to \times$

$۱۰ \to ۱۲ \to \times$

۴

$\Rightarrow gog(x) = \{(4,8),(2,6),(6,10)\}$

$4 \to 6 \to 8$
$2 \to 4 \to 6$
$6 \to 8 \to 10$
$8 \to 10 \to \times$

---

۵)

$fog(x) = \{(1,1),(3,7),(a,2),(b,7)\}$

$(4,2) \in fog$

$1 \to 2 \to 1$
$3 \to 4 \to 7$
$a \to 3 \to 2$
$b \to 1 \to 7$

$(4,1) \in gof$

$2 \to 1 \to 2$
$3 \to 2 \to 3$
$4 \to b \to 1$
$1 \to 7$

$\Rightarrow (4,2) = (a,2) \Rightarrow a = 4$

۲)

$\Rightarrow (4,b) = 4,5 \Rightarrow b = 5$

$f = \{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$

$\Rightarrow (a,b) = (4,5)$

---

۶)

$f(x) = ax+b \rightarrow$ خطی

$f(f(x)) = f(ax+b) = a^2x + ab + b = 4x+3 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$

$ab+b = 3 \xRightarrow{a=2} b = 1$

$\xRightarrow{a=-2} b = -3$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax+b \xrightarrow{a=2,\,b=1} f(x) = 2x+1 \xRightarrow{x=-1} f(-1) = -1 \\ \xrightarrow{a=-2,\,b=-3} f(x) = -2x-3 \xRightarrow[x=-1]{} f(-1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) = -1$$

$gof(-1) = g(f(-1)) = g(-1) = -8$

۲)

$gof(-1) = -8$

$g(2x+3) = 3x-2 \xRightarrow[x=-2]{} g(-1) = -8$

---

۷)

$D_{gof} = \{x \mid \underbrace{x \in D_f}_{x \in R} ; f(x) \in D_g\}$

$f(x) = \sqrt{x+|x|} \Rightarrow x+|x| \geq 0 \Rightarrow |x| \geq -x$

$\Rightarrow D_f = R$

۲)

$g(x) = \dfrac{1}{x^2-4x} \Rightarrow x^2-4x \neq 0 \Rightarrow x(x-4) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 0,4 \Rightarrow D_g = R - \{0,4\}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+|x|} \neq 0 \\ \Rightarrow x+|x| \neq 0 \Rightarrow |x| \neq -x \\ \Rightarrow x > 0 \\ \sqrt{x+|x|} \neq 4 \Rightarrow x+|x| \neq 16 \end{cases}$$

$0 \neq 16$ ✓ | $2x \neq 16$, $\boxed{x \neq 8}$

$\Rightarrow D_{gof} = (0,+\infty) - \{8\}$

۱۸

۱/۵

$D_{(f+g)\circ f} = \{x \mid x\in D_f ; f(x)\in D_{g+f}\}$

(1) $x\in[-1,1]$

$\sqrt{1-x^2}\in[0,1]$

(2) $\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\le 1 \Rightarrow x^2\ge 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$

$D_{f+g} = D_f\cap D_g \Rightarrow D_{f+g} = [0,1]$

$g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow x\ge 0 \Rightarrow D_g\,[0,+\infty)$

$f(x)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow (1-x)(1+x)\ge 0$ $\quad \begin{array}{ccccc} & -1 & & 1 & \\ - & & + & & - \end{array}$ $\Rightarrow D_f=[-1,1]$

$\Rightarrow D_{(f+g)\circ f}=[0,1]$ $\qquad (1)\cap(2) \rightarrow D_{(f+g)\circ f}=[-1,1]$

۱۹

الف) $f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)=4x+5$

$\frac{3x+1}{x-2}=t \Rightarrow x=\frac{2t+1}{t-3}$

$\Rightarrow f(t)=4\left(\frac{2t+1}{t-3}\right)+5=\frac{8t+4}{t-3}+5$

$=\frac{13t-11}{t-3} \Rightarrow f(x)=\frac{13x-11}{x-3}$

۲

ب) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3} \overset{x+\frac{1}{x}=t}{\Rightarrow} f(t)=t^3-3t \Rightarrow f(x)=x^3-3x$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$\overset{x+\frac{1}{x}=t}{\Rightarrow} x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$

۲۰

۲

$g(f(x))=0$

$g(1)=0$

$g(2\sqrt{2})=0$

$\Rightarrow f(x)=1=x\sqrt{x} \overset{\text{توان ۲}}{\Rightarrow} x^3=1 \Rightarrow x=1$

$f(x)=2\sqrt{2}=x\sqrt{x} \overset{\text{توان ۲}}{\Rightarrow} x^3=8 \Rightarrow x=2$

$\Rightarrow 2-1=1$