۱۹٫۵   بارم ۸   تصحیح دبیر عبدالباقی

① $f \circ f(\frac{۲}{۳}) = f(f(\frac{۲}{۳})) = f(\sqrt{۳}) = ۲$ پس $f \circ f(\frac{۲}{۳}) =$ ②

$\cot \frac{\pi x}{۴}$; $x \le ۱ \Rightarrow f(\frac{۲}{۳}) = \cot \frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$

$\sqrt{x^۲+۱}$; $\Rightarrow x > ۱ \Rightarrow f\sqrt{۳} = \sqrt{۴} = ۲$ ✓ ②

②

الف) $f(g(x)) \Rightarrow g(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$ $f(\frac{۱}{۲}) \Rightarrow \sqrt{\frac{۲\times۲-۱}{۲^۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ✓

ب) $f(g(x)$ $\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}} = -\sqrt{۲}-۱$ $[-\sqrt{۲}-۲]$ ②

$۱ \le \sqrt{۲} < ۲ \Rightarrow ۳ < \sqrt{۲}+۲ < ۴ \Rightarrow -۴ < -\sqrt{۲}-۱ < -۳$

$\Rightarrow [-\sqrt{۲}-۲] = \boxed{-۴}$ ✓

③

$g(f(\frac{\pi}{۴}))$

$f(\frac{\pi}{۴}) = \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $g(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$ ✓

④

الف) $f \circ g(x) = \{(۴,۵),(۲,۵),(۶,۱۲),(۸,۱۲)\}$ ✓

$۴ \to ۶ \to ۵$ $۲ \to ۴ \to ۵$

$۶ \to ۸ \to ۱۲$ $۸ \to ۱۰ \to ۱۰$

②

ب) $g \circ f(x) = \emptyset$ ✓ $۴ \to ۵ \to \times$ $۶ \to ۵ \to \times$ $۸ \to ۱۲ \to \times$ $۱۰ \to ۱۲ \to \times$

ج) $f \circ f(x) = \emptyset$ ✓ $۴ \to ۵ \to \times$, $۶ \to ۵ \to \times$, $۸ \to ۱۲ \to \times$; $۱۰ \to ۱۲ \to \times$

د) $g \circ g(x) = \{(۴,۸),(۲,۶),(۶,۱۰)\}$ ✓ $۴ \to ۶ \to ۸$ $۲ \to ۴ \to ۶$

$۶ \to ۸ \to ۱۰$ $۸ \to ۱۰ \to \times$

⑤

$f \circ g(x) = \{(۱,۱),(۲,۷),(a,۲),(b,۷)\}$ $(۴,۲) \in f \circ g$

$\Rightarrow a = ۴$

$g \circ f(x) = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ $(a,b) \in g \circ f$

$\Rightarrow b = ۵$

② $(a,b) = (۴,۵)$ ✓

⑥

$f(ax+b) = a^۲x + ab + b = ۴x + ۳ \Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲ \\ ab + b = ۳ \end{cases}$ $\overset{a=۲}{\Rightarrow} b = ۱$ $\overset{a=-۲}{\Rightarrow} b = -۳$

②

$\overset{a=۲, b=۱}{\Rightarrow} f(x) = ۲x + ۱ \Rightarrow f(-۱) = -۱$ ✓

$\overset{a=-۲, b=-۳}{\Rightarrow} f(x) = -۲x - ۳ \xrightarrow{x=-۱} f(-۱) = -۱$ $\Rightarrow f(-۱) = -۱$

$g(f(-۱)) \Rightarrow g(-۱) \Rightarrow g(-۱) = -۸$ $\Rightarrow g \circ f(-۱) = -۸$ ✓

$۲x + ۳ = -۱ \Rightarrow x = -۲$

⑦

$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f \,;\, f(x) \in D_g\}$ $\sqrt{}$ $x + |x| \geq ۰$

$|x| \geq -x \Rightarrow$ همواره برقرار

$g(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۴x}$ $x^۲ - ۴x \neq ۰ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۰, ۴\}$ ②

$x + |x| \neq ۰ \Rightarrow |x| \neq -x \Rightarrow x > ۰$

$\sqrt{x + |x|} \neq ۴$ $x \neq ۸$ $x \geq ۰$ $۲x \neq ۱۶$

$x + |x| \neq ۱۶$ $x - x = ۰$ $x <$ همیشه برقرار

$\Rightarrow D_{g \circ f} = (۰, +\infty) - \{۸\}$ ✓

⑧ ۱/۵

$D_{(f+g)of} = \{x \mid x \in D_f \,;\, f(x) \in D_{f+g}\}$

① $x \in [-۱, ۱]$ ② $\mathbb{R}$

D_{f+g} $\Rightarrow ۰ \leq \sqrt{۱ - x^۲} \leq ۱$ $\sqrt{۱ - x^۲} \leq ۱$ $۱ - x^۲ \leq ۱$ $x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

① ∩ ② → $[-۱, ۱]$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [۰, ۱]$

$g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_g \Rightarrow [۰, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{۱ - x^۲} \Rightarrow D_f = [-۱, ۱]$

$\Rightarrow D_{(f+g)of} \Rightarrow [۰, ۱]$

⑨

الف) $f\left(\frac{۳x+۱}{x-۲}\right) = ۴x + ۵$; $\frac{۳x+۱}{x-۲} = t \Rightarrow \frac{۲t+۱}{t-۳} = x$ $\Rightarrow f(t) = ۴\left(\frac{۲t+۱}{t-۳}\right) + ۵ = \frac{۱۳t - ۱۱}{t-۳}$ $\overset{t=x}{\Rightarrow}$ $f(x) = \frac{۱۳x - ۱۱}{x-۳}$ ✓

②

ب) $f\left(x + \frac{۱}{x}\right) = x^۳ + \frac{۱}{x^۳}$ $\Rightarrow f\left(x + \frac{۱}{x}\right) = \left(x + \frac{۱}{x}\right)^۳ - ۳ \times x \times \frac{۱}{x}\left(x + \frac{۱}{x}\right)$

$\Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳x$ ✓

⑩

$g(f(x)) = ۰$
$g(۱) = ۰$
$g(۲\sqrt{۲}) = ۰$

$\Rightarrow$ ② $\begin{cases} f(x) = ۱ \Rightarrow x\sqrt{x} \Rightarrow x^۳ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \\ f(x) = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow x^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$ ✓

۲−۱ ①