۱۹,۲۵ ۱ سپهر علایی

Date No

۱ـ

$A \times B = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)(۳,۳)\}$ ①

②

$B^۲ = \{(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳)\}$ ②

$A \times B - B^۲ = ① - ② = \{(۱,۲),(۱,۳)\}$ ✓

۲ـ الف) ②

$m^۲ = ۲ + m \quad m^۲ - m = ۲ \quad m(m-1) = ۲$

$m_۱ = ۲ \quad m_۲ = -۱$

$\{(۲,۱),(۲,۴)\}$ ← تابع نمی‌شود ✓ $\boxed{-۱}$ ✓

ب)

$m^۲ = m + ۲ \quad m^۲ - m = ۲ \quad m(m-1) = ۲$

$m_۱ = ۲$ ← جواب درست نیست زیرا $\quad m_۲ = -۱$

$\{(۲,۴),(۲,۱)\}$ $\quad$ تابع نمی‌شود X $\{(-۱,۴),(-۱,۳)\}$ ✓

m جوابی ندارد.

۳ـ

$f(۲) = ۲a+b = ۸ \Rightarrow ۲a+b = a+\overset{۰}{\overbrace{a+b}} = ۸$

$f(۱) = ۱-۱ = a+b = ۰ \qquad a = ۸$

$a+b=۰$

$۸+b=۰$

$b=-۸$

②

$\boxed{a \times b = ۸ \times -۸ = -۶۴}$

✓

۴- ②

$f(k) = ۲k - ۳ = ۴ - ۳k$

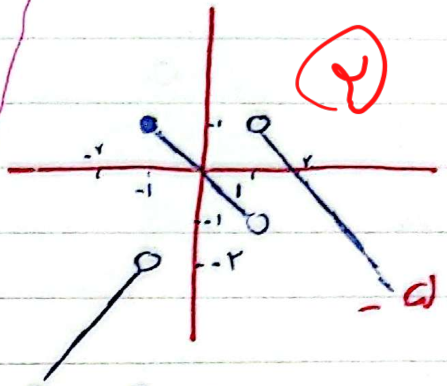
$۲k - ۳ = ۴ - ۳k$

$۵k = ۷$

$k = \frac{۷}{۵}$

$k = ۱٫۴ \Longrightarrow \boxed{K = ۱٫۴}$ ✓

۵- ②



دامنه $D_f : \mathbb{R} - \{۱\}$

برد $R_f = (-\infty, ۱]$ ✓

۶- الف) ②

$x^۲ + ۲y^۳ + ۱ = ۰$

$-\frac{x^۲ + ۱}{۲} = y^۳ \Rightarrow$

$۱ - x^۲ = ۲y^۳$

$y = \sqrt[۳]{\frac{x^۲ + ۱}{۲}} \Rightarrow y_۱ = y_۲$ ✓

این رابطه یک تابع است.

ب)

$x^۲ + ۴y^۲ - ۲x - ۱۲y + ۱۰ = ۰$

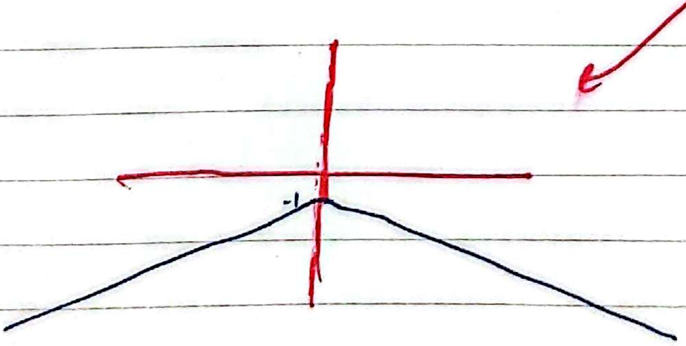
$(x^۲ - ۲x + ۱) + (۴y^۲ - ۱۲y + ۹) = ۰$

$\underbrace{(x - ۱)^۲}_{\text{مثبت}} + \underbrace{(۲y - ۳)^۲}_{\text{مثبت}} = ۰$ ✓

جمع ۲ عدد مثبت صفر شده است

پس حتما $x = ۱$ و $y = ۱٫۵$ بوده

پس تابع است.



۷- الف) روش مثال نقض $\sin_{180} = 0 \quad \sin_{0} = 0$

$0, 180$ $\quad f(x) = x \times \sin_{y} = y \times \sin_{x}$

② $\quad y_1 \neq y_2 \quad f(90) = 90 \times \sin_{0} = 0 \times \sin_{90}$

این تابع نیست. ✓ $\quad f(90) = 90 \times \sin_{180} = 180 \times \sin_{90}$

ب)

$0 < \sqrt{\frac{x}{y}} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}} = t$

$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \overset{\times t}{\Rightarrow} t^2 + 1 - 2t = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow$

$t = 1$

پس $\frac{x}{y} = 1$ پس $x = y$ پس این یک تابع است اما x یا y

نمی‌تواند صفر باشد. ✓ $\{(x,y) \mid x = y,\ x \neq 0,\ \{x,y\} \in \mathbb{R}\}$

تابع است. ✓ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

۸- الف) ① $\quad \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} \geq 0 \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 3 & \\ + & \bullet & - & \circ & + \end{array}$$

$D_f = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$

② $\quad \sqrt{\frac{2-x}{x}} \geq 0 \qquad x_1 = 2 \quad x_2 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & \\ - & \circ & + & \bullet & - \end{array}$$

$D_f = (0, 2]$

$① \cap ② \Rightarrow (0, 1]$ ✓

$D_f = (0, 1]$

۱٫۲۵

۸ـ ب

$\sqrt{y-۱} = \sqrt{۳} - \sqrt{x}$

$\sqrt{۳} - \sqrt{x} \geq ۰$

$x \leq ۳$

$y - ۱ = ۳ + x - ۲\sqrt{۳x}$

$y = x + ۴ - ۲\sqrt{۳x}$

$\overset{۰}{\underset{- \quad \phi \quad +}{}}$

$x_1 = ۰$

$۳x \geq ۰$

$\boxed{D_f = [۰, +\infty)} \rightarrow D = [۰,۳]$

۹ـ الف)

$y = \dfrac{\sqrt{x^۲ - ۷x + ۶}}{\sqrt{x - ۱۰x + ۱۶}} = \dfrac{\sqrt{(x-۶)(x-۱)}}{\sqrt{-۹x + ۱۶}} \Rightarrow (x-۶)(x-۱) \geq ۰$

x

$x_1 = ۶ \quad x_۲ = ۱$

①

$\underset{+ \quad \phi \quad - \quad \phi \quad +}{۱ \qquad ۶}$

$(-\infty, ۱] \cup [۶, +\infty)$

$-۹x + ۱۶ > ۰ \Rightarrow -۹x > -۱۶$

$۹x < ۱۶ \quad x < \frac{۱۶}{۹}$ ②

②

$\boxed{① \cap ② = D_f = (-\infty, ۱]}$ ✓

ب)

$\dfrac{x^۲ - ۷x + ۶}{x^۲ - ۱۰x + ۱۶} \geq ۰ \qquad \dfrac{(x-۶)(x-۱)}{(x-۸)(x-۲)} \geq ۰$

$x_1 = ۶ \quad x_۲ = ۱ \quad x_۳ = ۸ \quad x_۴ = ۲$

$\underset{+ \quad \phi \quad - \quad \phi \quad + \quad \phi \quad - \quad \phi \quad +}{۱ \qquad ۲ \qquad ۶ \qquad ۸}$

$\boxed{D_f = (\infty, ۱] \cup (۲, ۶] \cup (۸, +\infty)}$ ✓

۱. الف)

$۲x^۲ - ۵x + ۳ = 0 \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۶ = 0$

$(x-۲)(x-۳) = 0$

$x_1 = \frac{۲}{۲} = ۱ \quad x_2 = \frac{۳}{۲}$

$۱ \quad ۱٫۵$

$+ \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad +$

① $(-\infty, ۱] \cup [۱٫۵, +\infty)$

②

$۳x^۲ - ۷x + ۴ = 0 \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۲ = 0$

$(x-۴)(x-۳) = 0$

$x_1 = \frac{۴}{۳} \quad x_2 = \frac{۳}{۳} = ۱$

$۱ \quad \frac{۴}{۳}$

$+ \quad \odot \quad - \quad \odot \quad +$ ②

$(-\infty, ۱) \cup (\frac{۴}{۳}, +\infty)$

① ∩ ② $\Rightarrow D_f = (-\infty, ۱) \cup [۱٫۵, +\infty)$ ✓

ب)

$$\frac{۲x^۲ - ۵x + ۳}{۳x^۲ - ۷x + ۴} \geq 0$$

$x^۲ - ۵x + (۲ \times ۳) = 0$

$(x-۲)(x-۳) = 0$

$x_1 = \frac{۲}{۲} = ۱ \quad x_2 = \frac{۳}{۲}$

$۳x^۲ - ۷x + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۲ = 0$

$(x-۴)(x-۳) = 0$

$x_3 = \frac{۴}{۳} \quad x_4 = \frac{۳}{۳} = ۱$

$۱، ۱، \frac{۳}{۲}، \frac{۴}{۳}$

$\overset{*}{۱} \quad \frac{۴}{۳} \quad \frac{۳}{۲}$

$+ \quad \odot \quad + \quad \odot \quad - \quad \bullet \quad +$

$\boxed{D_f = (-\infty, ۱) \cup (۱, \frac{۴}{۳}) \cup [\frac{۳}{۲}, +\infty)}$ ✓