آفرین! ۲۰

نام و نام خانوادگی ...امیر محمد مجتبائی... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۱۱... کلاس ...یازدهم تجربی B...

۱

R_I , R_{II} ۲ برد نباید با هم همپوشانی داشته باشند $a^2-4 \geq 12a-20$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 ; & x>a \quad (I)\\ 12x-20 ; & x\le a \quad (II)\end{cases}$$

I , II : هر تابع چند ضابطه باید به طور جداگانه یک به یک باشد

(I) x^2-4 یک به یک و صعودی

(II) $12x-20$ یک به یک و صعودی

$a^2-12a+16 \geq 0$ در $(a-2)(a-4)\geq$

$+ \quad -4 \quad - \quad 4 \quad +$

این تابع چون صعودی بوده به ازای تمامی a هستند ... آن به این است با

$\boxed{a \geq -4}$

(۲) باشد یکی نمی‌شود همپوشانی بابد نیاید دو ضابطه برد هر

I: $x=a$, R_I ; $x^2-4 \xrightarrow{x=a} a^2-4$ II: $12x-20 \xrightarrow{x=a} 12a-20$

$R_I=(a^2-4,+\infty)$ چون تابع صعودی است x از a بزرگتر است پس کمترین مقدار I برابر a^2-4 است.

$R_{II}=(-\infty , 12a-20]$ $12a-20$

$a\in \cancel{(-\infty ,}$ دقت!

$a\in[-4,+\infty)$

۲

۲

$f(x)=3x+k \qquad f^{-1}(2)=4 \longrightarrow f(4)=2$

$\Rightarrow x=4 \to f(4)=3(4)+k=2 \to 12+k=2 \to k=-10 \to f(x)=3x-10$ ✓

الف) $f(7)=3(7)-10=11$ ✓

ب) $f(f(x))=f(3x-10)=3(3x-10)-10=9x-30-10=f\circ f(x)=9x-40$ ✓

۲

۳

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$A(2a,a)\in f^{-1}(x) \longrightarrow A(a,2a)\in f(x)=\dfrac{ax}{x-1}$ $R_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{1\}$

$\underline{x=a}$ $f(a)=\dfrac{a^2}{a-1}=2a \Rightarrow a^2=2a^2-2a \Rightarrow a^2-2a=0 \to a(a-2)=0$

$\times\ a=0$ $\boxed{a=2}$ ✓

$f(x)=\dfrac{ax}{x-1} \to y=\dfrac{ax}{x-1} \Rightarrow xy-y=ax \Rightarrow xy-ax=y$

$x(y-a)=y$ $x=\dfrac{y}{y-a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-a} \xrightarrow{a=0} f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x}=1$

از آنجا که دامنه $f(x)$ اندازه پس برد تابع f^{-1} نیز نباید داشته باشد، پس $a\neq 0$ باشد.

۲

۴

$f\{(3,5),(4,7),(7,2),(9,6)\}$ $f^{-1}\{(5,3),(7,4),(2,7),(6,9)\}$ $g(x)=\{(3,2),(8,4),(9,5)\}$ $g^{-1}\{(2,3),(4,8),(5,9)\}$

ترکیب هر تابع با معکوسش تابع همانی می‌کند

$f\circ f^{-1}(x)=x \to f\circ f^{-1}(x)=\{(5,5),(7,7),(2,2),(6,6)\}$ ✓

$f^{-1}\circ f(x)=x \to f^{-1}\circ f(x)=\{(3,3),(4,4),(7,7),(9,9)\}$ ✓

برابرند ندارد

$f\circ g^{-1}(x)=f(g^{-1}(x))=\{(2,5),(5,6)\}$ ✓ $\longleftarrow D_{f\circ g^{-1}}=\{2,5\}$

$g^{-1}(f(x))=\{(3,9),(7,3),(9,8)\}$ ✓ $\longleftarrow D_{g^{-1}\circ f}=\{3,7,9\}$

۲

۵

$h=\{(1,2),(3,4),(4,1),(5,1)\}$, $g=\{(2,1),(4,3),(9,5)\}$, $f=\{(2,4),(3,8),(9,0)\}$

$g^{-1}=\{(1,2),(3,4),(5,9)\}$

$f\circ g^{-1}=f(g^{-1}(x))=\{(1,4),(3,8),(5,0)\} \longrightarrow D_{f\circ g^{-1}}=\{1,3,5\}$, $D_h=\{1,3,4,5\}$

$D_{f\circ g^{-1}}\cap D_h=\{1,3\}$

$\dfrac{h}{f\circ g^{-1}}=\{(1,\tfrac{2}{4}),(3,\tfrac{4}{8})\}=\dfrac{h}{f\circ g^{-1}}=\{(1,\tfrac{1}{2}),(3,\tfrac{1}{2})\}$ ✓

۲

۶	۲	$y=\frac{3x+1}{x-2}$ ، رسم شکل ، مجانب افقی جابجا = ۳ ، تابع هموگرافیک ، مجانب عمودی = ۲ ، تابع هموگرافیک نمی‌باشد ، مجانب افقی = ۲ ، $y=\frac{3x+1}{x-3}$ مجانب عمودی = ۳ ، $x=1 \to y=-4$ ، $x=1 , y=-\frac{4}{2}$ $x=\frac{3y+1}{y-2}$ $xy-2x=3y+1$ $xy-3y=3x+1$ ، $y(x-3)=1+3x$ ، $y^{-1}=\frac{1+3x}{x-3}$ ، $y=\frac{3x+1}{x-3}$ در بازه‌ی $D_f\ [1,3]$ ، $y=\frac{3x+1}{x-2}$ ، یک به یک بوده و وارون پذیر است.
۷	۲	$f(x)=\lvert x-1\rvert-\lvert x-3\rvert$ ، $x=1$ ، $x=3$ $f(x)=2x-4 \to y=2x-4 \to x=2y-4$ $\Rightarrow \frac{x+4}{2}=y \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x+4}{2}\ \ R_{f^{-1}}[1,3]\ \ D_{f^{-1}}[-2,2]}$ $-x+1+x-3$ ، $x-1+x-3$ ، $x-1-x+3$ ؛ -2 ، $2x-4$ ، 2 $f(x)=\begin{cases}2 & x>3\\ 2x-4 & 1\le x\le 3\\ -2 & 1<x\end{cases}$ $[a,b] \to$ حداکثر مقدار ممکن $\to [1,3]$ ، $a=1$ ، $b=3$ ، در بازه‌ی $[1,3]$ یک به یک است.
۸	۲	$f(x)=\begin{cases}x^2+4 & x\ge 1\\ 4x-1 & x\le 0\end{cases}$ ، رسم شکل ، تابع وارون پذیر است (یک به یک است) $R_f=D_{f^{-1}}$ ، $R_{x^2+4}=[5,+\infty)=D^{-1}$ ، $D_{4x-1}=(-\infty,-1]$ $R_{x^2+4}=[5,+\infty) \to y=x^2+4$ ، $x^2=y-4$ ، $x=\sqrt{x-4}$ ، $y=\sqrt{x-4}$ ، $D_{f^{-1}}=[5,+\infty)$ $R_{4x-1}=(-\infty,-1] \to y=4x-1$ ، $4x=y+1$ ، $x=\frac{y+1}{4} \to y=\frac{x+1}{4}$ ، $D_{4x-1^{-1}}=(-\infty,-1]$ $f^{-1}(x)=\boxed{f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4} & x\ge 5\\ \frac{x+1}{4} & x\le -1\end{cases}}$
۹	۲	$f(x)=x^2-\frac{(x+1)^3}{x+3} \to f(x)=\frac{x^2(x+3)-(x+1)^3}{x+3}=\frac{x^3+3x^2-(x^3+3x^2+3x+1)}{x+3}$ $\frac{\cancel{x^3}+\cancel{3x^2}-\cancel{x^3}-\cancel{3x^2}-3x-1}{x+3}=\frac{-3x-1}{x+3}=-\frac{3x+1}{x+3}$ ، $b<0$ ، $\frac{-6x-2}{2x+6}=\frac{ax+b}{2x+c}$ ، $a=-6$ ، $c=6$ ، $b=-2$ $f(x)=-\frac{3x+1}{x+3} \Rightarrow f^{-1}(x) \to y=\frac{-3x-1}{x+3} \Rightarrow yx+3y=-3x-1$ $yx+3x=-3y-1$ ، $x(y+3)=-3y-1$ ، $y^{-1}=\frac{(-3x-1)\times 2}{(x+3)\times 2}=\frac{-6x-2}{2x+6}$ $\boxed{b=-2 \to f^{-1}(-2)=\frac{-3(-2)-1}{-2+3}=\frac{5}{1}=5}$
۱۰	۲	$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ، در همه‌ی x ها یعنی $\mathbb{R}$ یک به یک نیست. $f(x) \to x\in[-1,1]$ در یک به یک است. $y=\frac{x}{x^2+1} \to x=\frac{y}{y^2+1}$ ، $\sqrt{1-4x^2}\ge 0$ ، $1-4x^2\ge 1$ ، $1\ge 4x^2$ ، $\frac{1}{4}\ge x^2 \to -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$ $xy^2+x=y$ $xy^2-y+x=0 \to y^{-1}=\frac{1\pm\sqrt{1-4x^2}}{2x}$ ، $D_{f^{-1}}=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]-\{0\}$ $a=x$ ، $b=-1$ ، $c=c$