

۱۹,۷۵

به نام خداوند جان و خرد

حل مسئله و خوب نویسی

page: ()

و نژاد حاجی بابائی - یازدهم بهمن ۱۳۹۳ - تکلیف شماره ۱۱

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$f(n) = \begin{cases} n^3 - 4 & ; n > a \\ 12a - 20 & ; n \leq a \end{cases}$$

برای اینکه $f(n)$ یک به یک باشد؛ باید مطمئن شویم که $f(n)$ در بردار بخش اول $(n > a)$ برابر بردار بخش دوم $(n \leq a)$ نشود.

اول $n=a$ $\rightarrow$ بردار بخش اول $\rightarrow a^3 - 4$ $\rightarrow$ بردار بخش دوم $\rightarrow 12a - 20$

$$\Rightarrow 12a - 20 \leq a^3 - 4$$

$$\Rightarrow a^3 - 12a + 16 > 0 \Rightarrow (a^2 + 2a - 4)(a - 2) > 0$$

$$\Rightarrow (a+4)(a-2)(a-2) > 0 \Rightarrow \frac{-4}{-} + \frac{2}{+} + \frac{2}{+} \Rightarrow a > -4$$

$$f(n) = 3n + k \quad f^{-1}(2) = 4 \Rightarrow f(4) = 2 \Rightarrow 3(4) + k = 2 \Rightarrow k = -10$$

$$\Rightarrow f(n) = 3n - 10$$

الف) $f(v) \Rightarrow f(4) = 3(4) - 10 = 12 - 10 = 2 \Rightarrow f(v) = 2$

ب) $f(f(n)) = 3(3n - 10) - 10 = 9n - 30 - 10 = 9n - 40 \Rightarrow f(f(n)) = 9n - 40$

نقطه $A(2a, a)$ روی وارون تابع $f(n) = \frac{an}{n-1}$ است یعنی:

$$\Rightarrow f(a) = 2a \Rightarrow \frac{a \cdot a}{a-1} = 2a \Rightarrow \frac{a^2}{a-1} = 2a \Rightarrow a^2 = 2a^2 - 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0$$

$$\Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = 0$$

اما اگر $a = 0$ باشد تابع $f(n) = 0$ می شود که وارون ندارد پس این متناظر قابل قبول نیست پس فقط $a = 2$ معتبر است.

$$f = \{(3, 5), (4, 7), (7, 2), (9, 6)\} \quad g = \{(3, 2), (8, 4), (9, 5)\}$$

الف) $f \circ f^{-1}$

$$\begin{array}{l} 5 \xrightarrow{f^{-1}} 3 \xrightarrow{f} 5 \\ 7 \xrightarrow{f^{-1}} 4 \xrightarrow{f} 7 \\ 2 \xrightarrow{f^{-1}} 7 \xrightarrow{f} 2 \\ 6 \xrightarrow{f^{-1}} 9 \xrightarrow{f} 6 \end{array}$$

$$f \circ f^{-1} = \{(5, 5), (7, 7), (2, 2), (6, 6)\}$$

ب) $f^{-1} \circ f$

$$۳ \xrightarrow{f(n)} ۵ \xrightarrow{f^{-1}(m)} ۳$$

$$۴ \xrightarrow{f(n)} ۷ \xrightarrow{f^{-1}(m)} ۴ \Rightarrow f^{-1} \circ f = \{(۳, ۳), (۴, ۴), (۷, ۷), (۹, ۹)\}$$

$$۷ \xrightarrow{f(n)} ۲ \xrightarrow{f^{-1}(m)} ۷$$

$$۹ \xrightarrow{f(n)} ۶ \xrightarrow{f^{-1}(m)} ۹$$

(۴)

ج) $f \circ g^{-1}$

$$۲ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۳ \xrightarrow{f(n)} ۵$$

$$۷ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۸ \xrightarrow{f(n)} \emptyset \Rightarrow f \circ g^{-1} = \{(۲, ۵), (۵, ۷)\}$$

$$۵ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۹ \xrightarrow{f(n)} ۶$$

د) $g^{-1} \circ f$

$$۳ \xrightarrow{f(n)} ۵ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۹$$

$$۴ \xrightarrow{f(n)} ۷ \xrightarrow{g^{-1}(m)} \emptyset \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(۳, ۹), (۷, ۳), (۹, ۸)\}$$

$$۷ \xrightarrow{f(n)} ۲ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۳$$

$$۹ \xrightarrow{f(n)} ۶ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۸$$

$$f = \{(۲, ۴), (۴, ۸), (۶, ۰)\} \quad g = \{(۲, ۱), (۴, ۳), (۶, ۵)\}$$

$$h = \{(۱, ۲), (۳, ۴), (۴, ۱), (۵, ۱)\}$$

(۲)

(۵)

 $f \circ g^{-1}$:

$$۱ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۲ \xrightarrow{f(n)} ۴$$

$$۳ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۴ \xrightarrow{f(n)} ۸ \Rightarrow f \circ g^{-1} = \{(۱, ۴), (۳, ۸), (۵, ۰)\}$$

$$۵ \xrightarrow{g^{-1}(m)} ۶ \xrightarrow{f(n)} ۰$$

این زوج مرتب را در نظر بگیرید

$$\frac{h}{f \circ g^{-1}} = \{(۱, \frac{1}{۲}), (۳, \frac{1}{۲})\}$$

زیرا مخرج کسر را هم از من کسر گرفته اند
من شود.

$$f(n) = \frac{3n+1}{n-2}$$

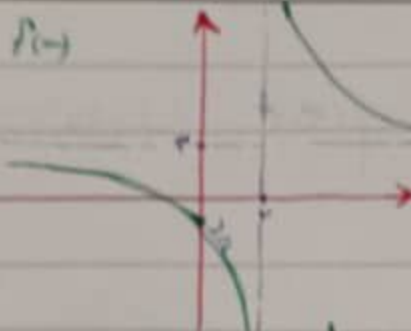
چون این تابع همگرافیک است در نتیجه یک به یک من باشد.

$$f^{-1}(n) = ضابطه \rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2} \Rightarrow xy - 2xn = 3y+1 \Rightarrow 3y - xy = -2n-1$$

$$\Rightarrow y(3-n) = -2n-1 \Rightarrow y = \frac{-2n-1}{3-n} \Rightarrow y = \frac{2n+1}{n-3} \Rightarrow f^{-1}(n) = \frac{2n+1}{n-3}$$

از روی شکل هم می توانیم ببینیم که $f(x)$ معکوس پذیر است.

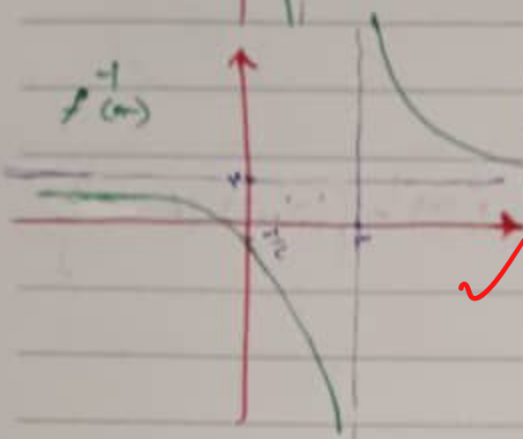
$$\begin{cases} \text{میان افقی} = 3 \\ \text{میان عمودی} = 2 \end{cases}$$



$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$\begin{cases} \text{میان افقی} = 2 \\ \text{میان عمودی} = 3 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x)$$



(6)

$$f(x) = |x-1| - |x-3| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-1-x+3 \rightarrow 2 & ; x > 3 \\ x-1+x-3 \rightarrow 2x-4 & ; 1 \leq x \leq 3 \\ -x+1+x-3 \rightarrow -2 & ; x < 1 \end{cases}$$

(1, 75)

نتیجه می گیریم همیشه طول بازه ای که هر آن f یک به یک باشد؛ بازه $[1, 3]$ است.

$$(در بازه $[1, 3]$) $f^{-1}(x) \rightarrow x = 2y - 4 \Rightarrow 2y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{2}$$$

(7)

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2} \quad ; \quad (در بازه $[1, 3]$)$$

همیشه وقتی معلوم تابعی را بدست می دهیم باید دامنه اش را مشخص کنیم!

$$D = [-2, 2]$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 4 & ; x \geq 1 \\ 4x - 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

برداشت اول $\rightarrow [5, +\infty)$

برداشت دوم $\rightarrow (-1, -5]$

با توجه به اینکه برداشت اول و دوم هیچ تقاطعی ندارند در نتیجه تابع یک به یک و وارون پذیر است. همچنین می دانیم که برداشت f برابر دامنه f^{-1} است.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{4} & ; x \leq -1 \\ \sqrt[3]{x-4} & ; x \geq 5 \end{cases}$$

(2)

(8)

$$f(n) = n^3 - \frac{(n+1)^3}{n+3} \Rightarrow \frac{n^3(n+3) - (n+1)^3}{n+3} = \frac{n^4 + 3n^3 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1}{n+3}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{-1-3n}{n+3} \Rightarrow f^{-1}(n) \text{ قابل } \div n = \frac{-1-3y}{y+3} \Rightarrow ny + 3n = -1-3y$$

$$\Rightarrow ny + 3y = -1-3n \Rightarrow y(n+3) = -1-3n \Rightarrow y = \frac{-1-3n}{n+3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(n) = \frac{-1-3n}{n+3} \Rightarrow f^{-1}(n) = \frac{-2-4n}{2n+4}$$

چون در صورت سؤال ذکر کرده است که

ضریب n در مخرج برابر ۲ است پس

صورت و مخرج را هر کدام دو برابر می‌کنیم (چون هم صورت و هم مخرج ضمیمه نشده باشد بارها می‌شوند و

تغییری در تابع ایجاد نمی‌شود)

$$f^{-1}(n) = \frac{an+b}{2n+d} = \frac{-4n-2}{2n+4} \Rightarrow \underline{b = -2}$$

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(-2) = \frac{-4(-2)-2}{2(-2)+4} = \frac{12-2}{-4+4} = \frac{10}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{f^{-1}(b) = f^{-1}(-2) = \infty}$$

$$f(n) = \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow y = \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow y(n^2+1) = n \Rightarrow yn^2 - n + y = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}, \quad (y \neq 0)$$

تابع $f(n)$ در بازه $(-1, 1)$ افزایشی است و در آن بازه مقادیرهای $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ را می‌گیرد. پس برای داشتن وارون یک مقداری، همان شاقه بین -1 و 1 را در نظر می‌گیریم.

باید در این بازه تمامات را هم در نظر بگیریم تا مقدار n بین -1 و 1 باشد. **نیازی نیست!**

$$f^{-1}(n) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4n^2}}{2n}, \quad n \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad n \neq 0$$