

معادله خط گذر از نقطه E :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-2)}{4 - 0} = \frac{4}{-1} = -4$$

الف) خط از نقطه E عبور کند

$$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -4(x - 4) \Rightarrow y = -4x + 14 + 2 \Rightarrow y = -4x + 16$$

ب) با خط $-1 = 2y + 4x$ موازی باشد + در شیب باید برابر $m = -1$ باشد به ازای x :

$$\frac{2}{2} = \frac{4}{4} \neq \frac{-1}{-1}$$

$$\Rightarrow 4x + 2y = 16$$

$$\Rightarrow 2y + 4x = n \xrightarrow{(4, 2)} 2(2) + 4(4) = n \Rightarrow 4 + 16 = n \Rightarrow n = 20$$

ج) به خط $1 = x + 3y$ عمود باشد + در شیب باید شیبش قرینه معکوس شیب این خط باشد

$$x + 3y = 1 \Rightarrow 3y = -x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = 3$$

نقطه گذر از $(4, 2)$

$$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 4) \Rightarrow y = 3x - 12 + 2 \Rightarrow y = 3x - 10$$

$$m = \tan \alpha \Rightarrow \tan \frac{\pi}{3} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

د) با جهت مثبت محور x زاویه $\frac{\pi}{3}$ بسازد

$$\rightarrow m = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \sqrt{3}(x - 4) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2 - 4\sqrt{3}$$

نقطه E را در نظر بگیرید

$$\text{فاصله دو نقطه} \rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$(x_2, y_2) \quad (x_1, y_1)$

الف) فاصله این نقطه از نقطه E :

$$\text{فاصله این نقطه} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

(x_0, y_0) (فاصله از خط)

ب) فاصله این نقطه از خط $3x + 4y = 3$

$$\left| \frac{3x + 4y - 3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{|3(2) + 4(3) - 3|}{\sqrt{25}} = \frac{|4 + 12 - 3|}{5} = \frac{13}{5} = 2.6$$

(۳)

$$x + 2y = 1 \text{ و } 2x + 3y = 4$$

(۲)

$$ax + by = c \Rightarrow ax + by = \frac{c+c'}{2}$$

$$ax + by = c'$$

(الف) معادله خط دقیقاً وسط این دو خط و موازی این دو خط

$$x + 2y = 1$$

$$\Rightarrow x + 2y = \frac{1+4}{2} \Rightarrow x + 2y = 2.5 \Rightarrow 2x + 3y = 5$$

$$2x + 3y = 4 \Rightarrow x + 1.5y = 2$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c' \end{cases}$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

(ب) فاصله این دو خط

$$3x - 2y = 1 \text{ و } 2x + 3y = 3$$

باتوجه به اینکه من دایره هر نقطه روی یک نیمساز از دو ضلع زاویه می‌کند فاصله است پس داریم:

$$\frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y - c'|}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \Rightarrow \frac{|3x - 2y - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|2x + 3y - 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

$$\Rightarrow |3x - 2y - 1| = |2x + 3y - 3| \Rightarrow \pm(3x - 2y - 1) = 2x + 3y - 3$$

(۲)

بنابراین معادله نیمسازها به یکی از دو صورت زیر است:

$$3x - 2y - 1 = 2x + 3y - 3 \Rightarrow x - 5y + 2 = 0$$

$$-(3x - 2y - 1) = 2x + 3y - 3 \Rightarrow -3x + 2y + 1 = 2x + 3y - 3 \Rightarrow 5x + y - 4 = 0$$

$$y + 3x = 4 \text{ و } y - 2x = 5$$

$$m : y = 2x + 5 \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{2 - (-2)}{1 + (-4)} \right| = \left| \frac{4}{-3} \right| = \frac{4}{3}$$

$$m' : y = -3x + 4 \Rightarrow m' = -3$$

$$\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$(\beta = 180^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow \beta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

زاویه منفرجه بین دو خط زاویه حاده بین دو خط

$$A \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -5 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow AB = 10$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \checkmark \quad \text{الف) فاصله این دو نقطه}$$

ب) مختصات نقطه دقیقاً وسط این دو نقطه $\rightarrow$ این نقطه را M فرض میکنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \quad \textcircled{2}$$

$$M \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \checkmark \quad \text{و } M(-1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} -10 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-10 - 2 + 3}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

الف) مرکز ثقل مثلث

$$\Rightarrow G \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \end{vmatrix} \quad \checkmark \quad \text{و } G(-3, -3)$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{-13 + 3 + 1}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

ب) مساحت مثلث
هرابر برای سه نقطه مثلث
و مساحتان داریم:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -10 & -2 & 3 \\ -13 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-30 - 39 - 2 - 9 + 10 - 26|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |-96| = \frac{1}{2} (96) = 48 \Rightarrow S_{\text{مثلث}} = 48 \quad \checkmark$$

$$y = \frac{2x+1}{4x-3}$$

$$-y = \frac{2x+1}{4x-3} \quad \checkmark \quad \text{الف) قرینه نسبت به محور x ها}$$

$$y = \frac{-2x+1}{-4x-3} \quad \checkmark \quad \text{ب) قرینه نسبت به محور y ها}$$

$$x = \frac{2y+1}{4y-3} \rightarrow y = \frac{3x+1}{4x-2} \quad \checkmark \quad \text{ج) قرینه نسبت به نیمه‌ای از ناحیه اول و سوم}$$

$$-x = \frac{-2y+1}{-4y-3} \rightarrow y = \frac{-3x+1}{4x+2} \quad \checkmark \quad \text{د) قرینه نسبت به نیمه‌ای از ناحیه دوم و چهارم}$$

$$X = x - \alpha \quad Y = y - \beta$$

مبدأ معنقات α | β - آنکاه داریم:

$$X = x - \gamma \quad Y = y + \gamma$$

ان (مبدأ معنقات γ | $-\gamma$):

$$\rightarrow X + \gamma = x \quad Y - \gamma = y$$

$$y = \frac{\gamma x + 1}{x - \gamma} \Rightarrow Y - \gamma = \frac{\gamma(X + \gamma) + 1}{(X + \gamma) - \gamma} \Rightarrow Y = \frac{\gamma X + \gamma + 1}{X - 1} + \gamma \Rightarrow Y = \frac{\gamma X + \gamma + 1 + \gamma X - \gamma}{X - 1}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{\gamma X + 1}{X - 1} \quad \checkmark$$

(2)

(9)

$$X = x - \gamma \quad Y = y - \gamma$$

ب (مبدأ معنقات γ | γ):

$$\rightarrow X + \gamma = x \quad \rightarrow Y + \gamma = y$$

$$y = \frac{\gamma x + 1}{x - \gamma} \Rightarrow Y + \gamma = \frac{\gamma(X + \gamma) + 1}{X + \gamma - \gamma} \Rightarrow Y = \frac{\gamma X + \gamma + 1}{X} - \gamma \Rightarrow Y = \frac{\gamma X + \gamma + 1 - \gamma X - \gamma}{X}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{X} \quad \checkmark$$

الف) حل به روش حذف:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ -3x + 15y = -3 \end{cases} \Rightarrow 19y = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{19} \Rightarrow x = \frac{14}{19} \quad \checkmark$$

$$x = - \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} = - \frac{4 + 10}{-15 - 4} = - \frac{14}{-19} \Rightarrow x = \frac{14}{19} \quad \checkmark$$

ب) حل به روش کرامر:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{3 - 2}{-15 - 4} = \frac{1}{-19} \Rightarrow y = \frac{-1}{19} \quad \checkmark$$

(2)

(10)