

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-4 - 1}{8 - 2} = \frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$$

شیب عمود منصف خط AB برابر ۶/۵

قرینه نقطه A نسبت به خط AB باشد

در نتیجه داریم:

$$m_{AB} \times m' = -1 \Rightarrow m_{AB} = -\frac{5}{6} \Rightarrow m' = \frac{6}{5}$$

$$x_H = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5$$

نقطه H که وسط نقطه A و B قرار دارد را پیدا می کنیم:

$$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 - 4}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow H(5, -\frac{3}{2})$$

در نتیجه عمود منصف خط AB برابر

با شیب $m' = \frac{6}{5}$ و گذرنده از $H(5, -\frac{3}{2})$ باشد.

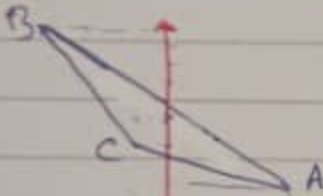
$$y - y_H = m'(x - x_H)$$

دقت!

(۲)

$$\Rightarrow y - (-\frac{3}{2}) = \frac{6}{5}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - \frac{3}{5} - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - \frac{9}{2}$$

در دستگاه مختصات این مثلث را با رأس های $A(3, 1)$ ، $B(-4, 7)$ ، $C(-1, 3)$ رسم می کنیم.



$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad m_{BC} = \frac{7 - 3}{-4 - (-1)} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} + 3 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 3y = -4x + 5 \Rightarrow -4x - 3y + 5 = 0$$

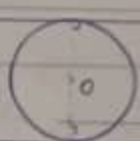
$$\Rightarrow \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{|-4(3) - 3(1) + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-10|}{5} = 2 \Rightarrow AH = 2$$

طول ضلع BC برابر ۵ واحد از طول ارتفاع AH بیشتر است.

من دایره فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره باشد.

با توجه به اینکه دو خط موازی $4y = 2x + 2$ و $2y - x = 7$ موازی هستند داریم:

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{7} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \begin{cases} 4y = 2x + 2 \\ 2y = x + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - 2y = 0 \\ x + 7 - 2y = 0 \end{cases}$$

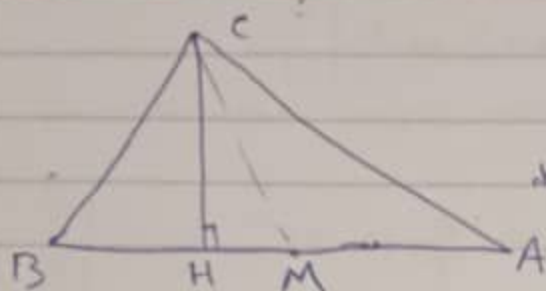


با توجه به اینکه فاصله این دو خط موازی و مماس بر دایره برابر با دو برابر شعاع

یا قطر است این فاصله را محاسب می کنیم.

$$\begin{cases} x - ry = -1 \\ x - ry = -v \end{cases} \Rightarrow \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-v + 1|}{\sqrt{1 + r^2}} = \frac{v}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow b \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{r}{\sqrt{5}} \quad (r)$$

$$\Rightarrow r = \frac{r}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = r^2 \pi \Rightarrow S = \frac{9}{5} \pi \quad \checkmark$$



$$C(-1, -r) \quad B(5, 1) \quad A(r, r)$$

$$\begin{aligned} \text{Line } AB &\rightarrow \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{r + 1}{2} = y \\ \frac{y_A + y_B}{2} &= \frac{1 + r}{2} = y \Rightarrow M \left| \begin{matrix} r \\ y \end{matrix} \right. \end{aligned}$$

$$BM = \sqrt{1^2 + r^2} = \sqrt{r^2 + 1}$$

$$m_{AB} = \frac{r - 1}{r - 5} = \frac{r}{-r} = -1$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -(x - 5) \Rightarrow y = -x + 5 + 1 \Rightarrow y = -x + 6$$

$$\text{Distance from } C \text{ to line } AB \Rightarrow y + x - 6 = 0 \Rightarrow y + x - 6 = 0$$

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(-1) + 1(-r) - 6|}{\sqrt{2}} = \frac{|-7 - r|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = CH \quad (r)$$

$$BC = \sqrt{5^2 + r^2} = \sqrt{25 + r^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$CH^2 + BH^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{49}{2} + BH^2 = 26 \Rightarrow BH^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$MH = BM - BH \Rightarrow MH = \sqrt{r^2 + 1} - \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{r}}{r} \quad \checkmark$$

$$(3m - 2)x + (5 - m)y - v = 0$$

$$(m + 1)x - (2m - 5)y + 1 = 0$$

چون این دو خط به هم عمود هستند در نتیجه حاصل ضرب شیب آنها -1 است

$$m \cdot m' = -1 \Rightarrow \frac{3m - 2}{5 - m} \times \frac{m + 1}{2m - 5} = -1 \Rightarrow \frac{3m - 2}{m - 5} \times \frac{m + 1}{2m - 5} = -1 \quad (r)$$

$$\Rightarrow \frac{(3m - 2)(m + 1)}{(m - 5)(2m - 5)} = -1 \Rightarrow \frac{3m^2 + 3m - 2m - 2}{2m^2 - 5m - 10m + 25} = \frac{3m^2 + m - 2}{2m^2 - 15m + 25} = -1$$

$$\Rightarrow 3m^2 + m - 2 = -2m^2 + 15m - 25 \Rightarrow 5m^2 - 14m + 23 = 0$$

باقی به آنگاه دلت (Δ) این معادله منفی است در نتیجه بازای هیچ مقدار m که خط به هم عمود نیست.

$$AB: x+2y=3$$

$$AC: y=2x-1$$

$$BC: x+y=5$$

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-1=y \end{cases} \Rightarrow x+2y=3 \Rightarrow \Delta x = \Delta \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow x+2y=3 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x=\Delta \Rightarrow B \begin{vmatrix} \Delta \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x-1=y \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow 2x-y=1 \Rightarrow 2x=\Delta \Rightarrow x=\frac{\Delta}{2} \Rightarrow y=\frac{5}{2} \Rightarrow C \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2} \\ \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

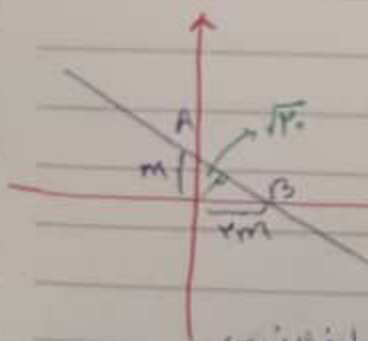
$$\text{مركز } M \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{\Delta + \frac{\Delta}{2}}{2} = \frac{1.5}{2} \\ \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{-1 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{1.5}{2} \end{cases} \Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{1.5}{2} \\ \frac{1.5}{2} \end{vmatrix}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{1.5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\Delta\sqrt{2}}{2}$$

$$AH: \text{خط } A \text{ به } BC \Rightarrow \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1(1)+1(1)-5|}{\sqrt{2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{AM}{AH} = \frac{\frac{\Delta\sqrt{2}}{2}}{\frac{\Delta}{\sqrt{2}}} = \frac{\Delta\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\Delta} = 1 \quad \checkmark$$

ابتدا خط را به طور فرضی با شیب $-\frac{1}{2}$ رسم می کنیم

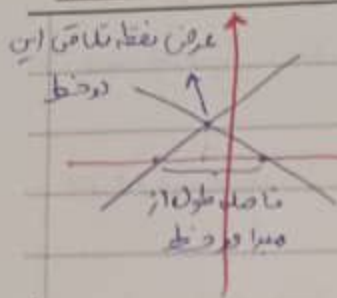


$$\text{بر اساس مساحت} \\ \text{مساحت مستطین} = AB \times \sqrt{2} = m \times 2m = 2m^2 \\ \text{خط و محور متعامد}$$

$$\text{بر اساس رابطه فیثاغورس: } m^2 + 4m^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 5m^2 \Rightarrow AB = \sqrt{5}m \quad \textcircled{I}$$

$$\Rightarrow AB \times \sqrt{2} = 2m^2 \quad \textcircled{2} \Rightarrow \sqrt{5}m \times \sqrt{2} = 2m^2 \Rightarrow \sqrt{5} \times \sqrt{5} = m \Rightarrow m = \Delta$$

$$\Rightarrow AB = \Delta\sqrt{5} \quad \checkmark$$



بند استخوان خامه
برای اثبات است

$$\rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{\text{فاصله طول}}{\text{خط}} \times \frac{\text{عرض فقط}}{2} = \frac{\Delta}{2}$$

$$my - \epsilon n = \gamma m \xrightarrow{y=0} -\epsilon n = \gamma m \Rightarrow n = \frac{\gamma m}{-\epsilon} = \frac{m}{-\gamma}$$

$$y + m\alpha = \alpha + \gamma \xrightarrow{y=0} m\alpha = \alpha + \gamma \Rightarrow m\alpha - \alpha = \gamma \Rightarrow \alpha(m-1) = \gamma$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{m-1} \quad \text{نقطه تقاطع:} \begin{cases} my - \epsilon n = \gamma m \\ y + m\alpha = \alpha + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} my - \epsilon n = \gamma m \\ -my - m^2\alpha = -m\alpha - \gamma m \end{cases}$$

مربع را جمع می کنیم

$$\Rightarrow -\epsilon n - m^2\alpha = \gamma m - m\alpha - \gamma m \Rightarrow m^2\alpha + \epsilon n - m\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow y = \gamma$$

$$\text{فاصله طول از مبدأ فقط} = \left| \frac{\gamma}{m-1} - \frac{m}{-\gamma} \right| = \left| \frac{\gamma}{m-1} + \frac{m}{\gamma} \right| \rightarrow \left| \frac{\epsilon + m^2 - m}{\gamma(m-1)} \right|$$

$$m > 1 \rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon}{\gamma(m-1)} \times \gamma = \Delta \Rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon}{m-1} - \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon - \Delta m + \Delta}{m-1} = 0 \Rightarrow \frac{m^2 - \gamma m + 4}{m-1} = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$m < 1 \rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon}{\gamma(1-m)} \times \gamma = \Delta \Rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon}{1-m} - \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon - \Delta + \Delta m}{1-m} = 0 \Rightarrow \frac{m^2 + \epsilon m - 1}{1-m} = 0 \Rightarrow m^2 + \epsilon m - 1 = 0$$

بابت این هم ضرب و جمع ریشه ها منفی است پس هر دو قابل قبول و منفی و حاصل ضرب ریشه ها $P = -1$ که کمتر از 1 هستند

$$\Rightarrow \frac{P}{m} = -1 \quad \text{حاصل ضرب ریشه ها} = -1 \times 3 = -3 \quad \checkmark$$

معادله قریب خط $y = 2x - 3$ نسبت به نقطه $M(2, -2)$ باید دو شرط داشته باشد

(۱) این معادله باید موازی با خط $y = 2x - 3$ باشد

(۲) باید فاصله نقطه $M(2, -2)$ از هر دو خط یکسان باشد

①: معادله قریب $y = 2x + m$ $\rightarrow$ خط $y = 2x - 3$ نسبت به خط $y = 2$

②: $\frac{|2(2) - 1(-2) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2(2) - 1(-2) + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow |3| = |4 + m|$

$\rightarrow \begin{cases} m + 4 = +3 \Rightarrow m = -3 \\ m + 4 = -3 \Rightarrow m = -7 \end{cases}$ زیرا در این حالت هر دو خط هم عمود منطبق می شوند

②

⑨

معادله قریب خط $y = 2x - 3$ نسبت به نقطه $M(2, -2)$ $y = 2x - 9$ ✓

بایستی بدانیم که $A(1, 2)$ و $A'(a, b)$ قریب A نسبت به خط $y = x + 5$ است

در نتیجه وسط پاره خط AA' نقطه $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ است که چون روی

خط $y = x + 5$ قرار دارد پس: $\frac{b+2}{2} = \frac{a+1}{2} + 5 \Rightarrow b+2 = a+1+10 \Rightarrow b = a+9$ ①

از طرف دیگر خط $y = x + 5$ بر خط راستی که از A و A' می گذرد عمود است، در نتیجه حاصل ضرب

شیب های آنها برابر -۱ است. بنابراین: $\left(\frac{b-2}{a-1}\right) \times 1 = -1 \Rightarrow b-2 = a-1 \Rightarrow a+b=3$ ②

① و ②: $a + a + 9 = 3 \Rightarrow 2a + 9 = 3 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 4$

$\Rightarrow 2b - a = 2(4) - (-3) = 8 + 3 = 11 \Rightarrow 2b - a = 11$ ۱۵