

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-4 - 1}{8 - 2} = \frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$$

شیب عمود منصف خط AB برابر

مربعی معکوس منشی خط AB باشد

در نتیجه داریم:

$$m_{AB} \times m' = -1 \Rightarrow m_{AB} = -\frac{5}{6} \Rightarrow m' = \frac{6}{5}$$

$$x_H = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5$$

نقطه H که وسط نقاط A و B قرار دارد را پیدا می کنیم:

$$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 - 4}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow H(5, -\frac{3}{2})$$

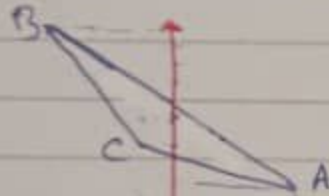
در نتیجه عمود منصف خط AB برابر

با شیب $m' = \frac{6}{5}$ و گذرنده از $H(5, -\frac{3}{2})$ باشد.

$$y - y_H = m'(x - x_H)$$

$$\Rightarrow y - (-\frac{3}{2}) = \frac{6}{5}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - 6 + (-\frac{3}{2}) \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - \frac{15}{2}$$

در مشق: مختصات این مثلث را با رأس های $A(3, 1)$, $B(-4, 7)$, $C(-1, 3)$ رسم می کنیم.



$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad m_{BC} = \frac{y - 3}{-4 - (-1)} = \frac{7 - 3}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} + 3 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{فاصله نقطه A تا خط BC} &= \text{طول ارتفاع AH} \\ \Rightarrow 3y &= -4x + 5 \\ \Rightarrow -4x - 3y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

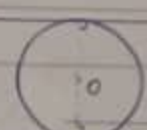
$$\Rightarrow \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{|-4(3) - 3(1) + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-10|}{5} = 2 \Rightarrow AH = 2$$

طول ضلع BC و ۳ واحد از طول ارتفاع AH بیشتر است.

من دایره فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره باشد.

با توجه به اینکه در خط $4y = 2x + 2$ و $2y - x = 7$ موازی هستند داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \begin{cases} 4y = 2x + 2 \\ 2y = x + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - 2y = 0 \\ x + 7 - 2y = 0 \end{cases}$$

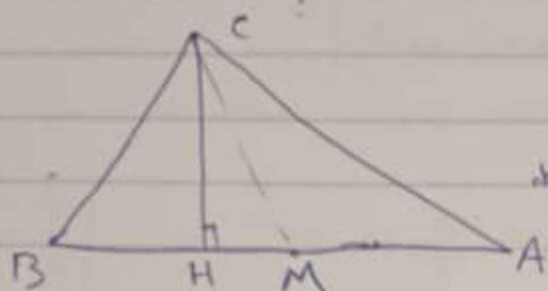


با توجه به اینکه فاصله این دو خط موازی و مماس بر دایره برابر با دو برابر شعاع

یا قطر است این فاصله را محاسب می کنیم.

$$\begin{cases} x - ry = -1 \\ x - ry = -v \end{cases} \Rightarrow \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-v + 1|}{\sqrt{1 + r^2}} = \frac{v}{\sqrt{\Delta}} = 0 \Rightarrow b \cdot b_0 = r^2$$

$$\Rightarrow r = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \Rightarrow S = r^2 \pi \Rightarrow S = \frac{9}{\Delta} \pi$$



$$C(-1, -r) \quad B(\epsilon, 1) \quad A(r, r)$$

$$\begin{aligned} \text{خط } CH \text{ موازی } AB \Rightarrow \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{r + \epsilon}{2} = r \\ \frac{y_A + y_0}{2} = \frac{1 + r}{2} = r \Rightarrow M \left| \begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right. \end{aligned}$$

$$BM = \sqrt{1^2 + r^2} = \sqrt{r}$$

$$m_{AB} = \frac{r - 1}{r - \epsilon} = \frac{r}{-r} = -1$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -(x - \epsilon) \Rightarrow y = -x + \epsilon + 1 \Rightarrow y = -x + \Delta$$

$$\text{طول } CH \text{ برابر با فاصله نقطه } C \text{ از خط } AB \text{ است} \Rightarrow y + x - \Delta = 0$$

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(-1) + 1(-r) - \Delta|}{\sqrt{2}} = \frac{|9|}{\sqrt{r}} = \frac{9}{\sqrt{r}} = CH$$

$$BC = \sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2} = \sqrt{r\Delta + 14} = \sqrt{\epsilon 1}$$

$$CH^2 + BH^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{1}{r} + BH^2 = \epsilon 1 \Rightarrow BH^2 = \frac{1}{r} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$MH = BM - BH \Rightarrow MH = \sqrt{r} - \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$(rm - r)x + (\Delta - m)y - v = 0$$

$$(m + 1)x - (rm - \epsilon)y + 1 = 0$$

چون این دو خط بر هم عمود هستند در نتیجه حاصل ضرب شیب آنها -1 است

$$m \cdot m' = -1 \Rightarrow \frac{r - rm}{\Delta - m} \times \frac{m + 1}{rm - \epsilon} = -1 \Rightarrow \frac{rm - r}{m - \Delta} \times \frac{m + 1}{rm - \epsilon} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{(rm - r)(m + 1)}{(m - \Delta)(rm - \epsilon)} = -1 \Rightarrow \frac{rm^2 + rm - r}{rm^2 - \epsilon m - 1 \cdot m + r} = \frac{rm^2 + m - r}{rm^2 - 1 \cdot \epsilon m + r} = -1$$

$$\Rightarrow rm^2 + m - r = -rm^2 + 1 \cdot \epsilon m - r \Rightarrow \Delta m^2 - 1 \cdot rm + 1 \Delta = 0$$

باتوجه به اینکه دلت (Δ) این معادله صفر است در نتیجه بازای هیچ مقدار m که خط بر هم عمود نیست

$$AB: x+2y=3$$

$$AC: y=2x-1$$

$$BC: x+y=5$$

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-1=y \end{cases} \Rightarrow x+2y=3 \Rightarrow \Delta x = \Delta \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow x+2y=3 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x=\Delta \Rightarrow B \begin{vmatrix} \Delta \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x-1=y \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow 2x-y=1 \Rightarrow 2x=\Delta \Rightarrow x=\frac{\Delta}{2} \Rightarrow y=\frac{5}{2} \Rightarrow C \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2} \\ \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

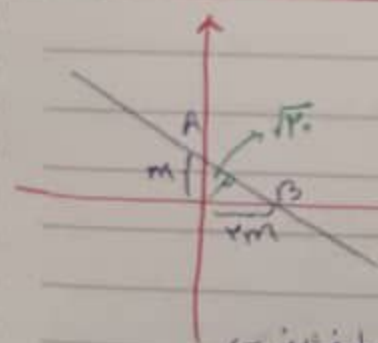
$$M \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{\Delta + \frac{\Delta}{2}}{2} = \frac{1.5}{2} \\ \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{-1 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{1.5}{2} \end{cases} \Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{1.5}{2} \\ \frac{1.5}{2} \end{vmatrix}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{1.5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\Delta\sqrt{2}}{2}$$

$$AH: \text{خط } A \text{ به } BC \Rightarrow \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1(1)+1(1)-5|}{\sqrt{2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$$

$$\text{نسبت ارتفاع } AH: \frac{AM}{AH} = \frac{\frac{\Delta\sqrt{2}}{2}}{\frac{\Delta}{\sqrt{2}}} = \frac{\Delta}{2}$$

ابتدا خط را به طور فرضی با شیب $-\frac{1}{2}$ رسم می کنیم

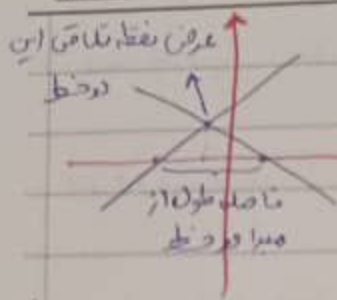


بر اساس مساحت
مساحت مستطین $= AB \times \sqrt{2} = m \times 2m = 2m^2$
خط و محورهای مختصات

$$\text{بر اساس رابطه فیثاغورس: } m^2 + 4m^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 5m^2 \Rightarrow AB = \sqrt{5}m \quad (I)$$

$$\Rightarrow AB \times \sqrt{2} = 2m^2 \quad (2) \Rightarrow \sqrt{5}m \times \sqrt{2} = 2m^2 \Rightarrow \sqrt{10} \times \sqrt{5} = m \Rightarrow m = \Delta$$

$$\Rightarrow AB = \Delta\sqrt{5}$$



بند استخوان خامه
برای اثبات است

$$\rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{\text{فاصله طول}}{\text{عرض}} \times \frac{1}{2} = \frac{\Delta}{2}$$

$$my - \epsilon n = \gamma m \xrightarrow{y=0} -\epsilon n = \gamma m \Rightarrow n = \frac{\gamma m}{-\epsilon} = \frac{m}{-\gamma}$$

$$y + m\alpha = \alpha + \gamma \xrightarrow{y=0} m\alpha = \alpha + \gamma \Rightarrow m\alpha - \alpha = \gamma \Rightarrow \alpha(m-1) = \gamma$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{m-1} \quad \text{نقطه تقاطع:} \begin{cases} my - \epsilon n = \gamma m \\ y + m\alpha = \alpha + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} my - \epsilon n = \gamma m \\ -my - m^2\alpha = -m\alpha - \gamma m \end{cases}$$

مربع را جمع می کنیم

$$\Rightarrow -\epsilon n - m^2\alpha = \gamma m - m\alpha - \gamma m \Rightarrow m^2\alpha + \epsilon n - m\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow y = \gamma$$

$$\text{فاصله طول (میدان فقط)} = \left| \frac{\gamma}{m-1} - \frac{m}{-\gamma} \right| = \left| \frac{\gamma}{m-1} + \frac{m}{\gamma} \right| \rightarrow \left| \frac{\epsilon + m^2 - m}{\gamma(m-1)} \right|$$

$$m > 1 \rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon}{\gamma(m-1)} \times \gamma = \Delta \Rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon}{m-1} - \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon - \Delta m + \Delta}{m-1} = 0 \Rightarrow \frac{m^2 - \gamma m + 4}{m-1} = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$m < 1 \rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon}{\gamma(1-m)} \times \gamma = \Delta \Rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon}{1-m} - \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - m + \epsilon - \Delta + \Delta m}{1-m} = 0 \Rightarrow \frac{m^2 + \epsilon m - 1}{1-m} = 0 \Rightarrow m^2 + \epsilon m - 1 = 0$$

بابت این هم ضرب و جمع ریشه ها منفی است پس هر دو قابل قبول و منفی و حاصل ضرب ریشه ها $P = -1$ که کمتر از 1 هستند

$$\left. \begin{aligned} & \text{حاصل ضرب مقادیر ممکن برای } m \\ & = -1 \times 3 = -3 \end{aligned} \right\}$$

معادله قرینه خط $y = 2x - 3$ نسبت به نقطه $M(2, -2)$ باید دو شرط داشته باشد:

(۱) این معادله باید موازی با خط $y = 2x - 3$ باشد.

(۲) باید فاصله نقطه $M(2, -2)$ از هر دو خط یکسان باشد.

(۱) معادله قرینه $y = 2x + m$ $\rightarrow$ $y = 2x - 3$ خط
نسبت به خط $y = 2x - 3$

(۲) $\frac{|2(2) - 1(-2) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2(2) - 1(-2) + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow |3| = |4 + m|$

$\rightarrow \begin{cases} m + 4 = +3 \Rightarrow m = -3 \\ m + 4 = -3 \Rightarrow m = -7 \end{cases}$ زیرا در این حالت هر دو خط هم غرق
منطبق می شوند

9

معادله قرینه خط $y = 2x - 3$ نسبت به
نقطه $M(2, -2)$ $y = 2x - 9$

بایستی به اینده $A(1, 2)$ و $A'(a, b)$ قرینه A نسبت به خط $y = x + 5$ است

در نتیجه وسط پاره خط AA' نقطه $(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2})$ است که چون روی

خط $y = x + 5$ قرار دارد پس: $\frac{b+2}{2} = \frac{a+1}{2} + 5 \Rightarrow b+2 = a+1+10 \Rightarrow b = a+9$ (۱)

از طرف دیگر خط $y = x + 5$ بر خط راستی که از A و A' می گذرد عمود است، در نتیجه حاصل ضرب

شیب های آنها برابر -۱ است. بنابراین: $(\frac{b-2}{1-a}) \times 1 = -1 \Rightarrow b-2 = a-1 \Rightarrow a+b=3$ (۲)

10

(۱) و (۲): $a + a + 9 = 3 \Rightarrow 2a + 9 = 3 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 4$

$\Rightarrow 2b - a = 2(4) - (-3) = 8 + 3 = 11 \Rightarrow 2b - a = 11$