

من داریم در مستطیل طلائی نسبت طول به عرض برابر با عدد طلائی یعنی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است پس داریم: (طول مستطیل را به اندازه x افزایش می دهیم)

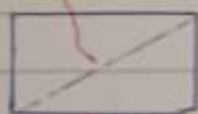
$$\frac{\omega+x}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2(\omega+x) = r(1+\sqrt{5}) \Rightarrow \omega+x = \frac{r}{2}(1+\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow x = \frac{r}{2}\sqrt{5} - r \Rightarrow \text{مستطیل طلائی: } \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{r+\frac{r}{2}\sqrt{5}}{r} \Rightarrow S = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})a^2$$

$$\text{مستطیل اولیه: } \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{\omega}{r} \Rightarrow 2 \cdot a^2 = S$$

$$\frac{\text{مساحت مستطیل طلائی}}{\text{مساحت مستطیل اولیه}} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})a^2}{2 \cdot a^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{r+\frac{r}{2}\sqrt{5}}{\omega} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{r+\frac{r}{2}\sqrt{5}}{\omega}$$

$(1+\sqrt{5})a$



$2a$

$$\frac{\text{قطر}}{\text{طول}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{قطر} = (1+\sqrt{5})a \\ \text{طول} = 2a \end{cases}$$

$$\text{با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم: } (2a)^2 + (\text{عرض})^2 = ((1+\sqrt{5})a)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 + x^2 = a^2 + 5a^2 + 2\sqrt{5}a^2$$

$$\Rightarrow x^2 = a^2 + 2\sqrt{5}a^2 \Rightarrow x^2 = (1+2\sqrt{5})a^2 \Rightarrow x = \sqrt{(1+2\sqrt{5})}a$$

$$\Rightarrow \text{عرض} = \sqrt{(1+2\sqrt{5})}a \Rightarrow \left(\frac{\text{طول}}{\text{عرض}}\right)^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{(1+2\sqrt{5})}a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leftarrow \text{مقدور نسبت طول به عرض مستطیل}$$

$$2a + \sqrt{2a^2 + \varepsilon a} = r \Rightarrow \sqrt{2a^2 + \varepsilon a} = r - 2a \Rightarrow 2a^2 + \varepsilon a = (r - 2a)^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 + \varepsilon a = r^2 - 4ra + 4a^2 \Rightarrow \varepsilon a - 2a^2 = r^2 - 4ra \Rightarrow a^2 - 2ra + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-r)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ a = r \end{cases}$$

طول اولیه

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}(3-\sqrt{x-1}) - \sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}+3)}{(\sqrt{x-1}+3)(3-\sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{x+1}}{9-(x-1)} = \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \sqrt{x-1}$$

($\sqrt{x-1} \neq 0$)

$$\Rightarrow -2\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1} = (10-x)\sqrt{x-1} \Rightarrow -2\sqrt{x+1} = 10-x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{x}{2} - 5 \xrightarrow{x/2 - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 10} x+1 = \frac{x^2}{4} - 5x + 25 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - 6x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 - 4\sqrt{3} \text{ غلط } \Delta \text{ فرق است} \\ x = 12 + 4\sqrt{3} \checkmark \end{cases}$$

این معادله فقط یک ریشه مثبت دارد.

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

$$\Rightarrow \frac{2-\sqrt{2-x} - (\sqrt{2-x}+2)}{(\sqrt{2-x}+2)(2-\sqrt{2-x})} = \frac{(\sqrt{2-x})^2}{5\sqrt{2-x}} \Rightarrow \frac{-2\sqrt{2-x}}{4-(2-x)} = \frac{\sqrt{2-x}}{5}$$

چون $x=2$ مخرج را صفر می کند پس جواب معادله نیست و می توانیم طرفین را بر $\sqrt{2-x}$ تقسیم کنیم. به این ترتیب داریم:

$$\frac{-2}{2+x} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2+x = -10 \Rightarrow x = -12$$

بنابراین معادله جواب مثبت ندارد.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1\% \times 9x^2(1-x)^2}{9} \iff 9(1-x)^2 + 9x^2 = 1\%(x^2)(1-x)^2$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) + 9x^2 = 1\% x^2 (x^2 - 2x + 1)$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 18x + 9 + 9x^2 = 1\% x^4 - 32\% x^3 + 1\% x^2$$

$$\Rightarrow 14\% x^4 - 32\% x^3 + 142\% x^2 + 18x - 9 = 0$$

برای معادله درجه ۴ با ضریب a برای x^4 و ضریب b برای x^3 همواره داریم:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} : \frac{-b}{a}$$

$$\text{پس در معادله بالا مجموع ریشه‌ها} = \frac{32\%}{14\%} = 2 \text{ است.} \quad \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{32\%}{14\%} = 2$$

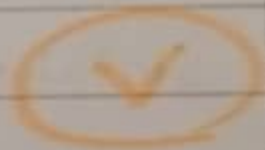
ابتدا برای اینکه عبارت های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده باشند باید شرایط

زیر وجود داشته باشد:

$$-x^2 + 4x - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0$$

2	4
+	-
+	+

$$\rightarrow 2 \leq x \leq 4 \quad (I)$$



$$-x^3 + 5x^2 + 24x - 100 \geq 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 - 24x + 100 \leq 0 \Rightarrow (x-4)(x+4)(x-5) \leq 0$$

-4	4	5
-	+	-
-	+	+

$$x \leq -4 \quad \vee \quad 4 \leq x \leq 5 \quad (II)$$

از (I) و (II) منتهی می‌شود که فقط به ازای $x = 4$ عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده هستند. اکنون منقضی می‌کنیم $x = 4$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{4+0} + \sqrt{16+0} = 4+2 \Rightarrow 2+4 = 4+2$$

پس $x = 4$ تنها جواب معادله می‌باشد. معادله فقط یک جواب دارد.

نقطه‌های تقاطع نمودارهای دو تابع را پیدا می‌کنیم.

$$3y + x = 17 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3}$$

بنابراین طول نقطه‌های برخورد دو تابع جواب‌های معادله زیر هستند:

$$|x+2| + |x-1| = \frac{17-x}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \Rightarrow x+2 + x-1 = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x = 2 \\ -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow x+2 - (x-1) = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x = 8 \text{ غلط} \\ x \leq -2 \Rightarrow -(x+2) - (x-1) = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

بنابراین محتمل‌ترین نقاط برخورد به صورت زیر بدست می‌آید:

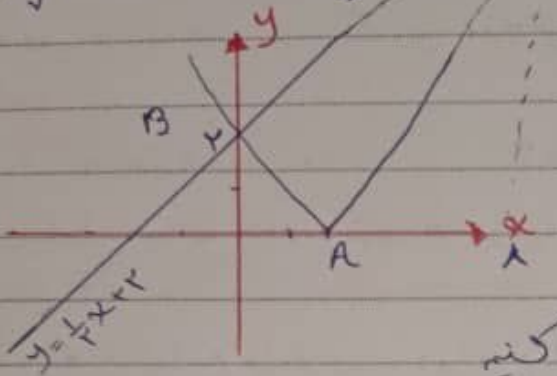
$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3} = \frac{17-2}{3} = 5 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$x = -4 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3} = \frac{17+4}{3} = 7 \Rightarrow B \begin{vmatrix} -4 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

ابتدا هر دو تابع را رسم می‌کنیم



از روی شکل متوجه می‌شویم که

نقاط برخورد عبارتند از: $(0,2)$ ، $(4,4)$

$A(2,0)$ $B(0,2)$ $C(4,4)$

برای اینکه مساحت ناحیه محدود بین این دو تابع را پیدا کنیم

کافی است مساحت مثلث ABC را بیابیم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2+0+0-16-12-0| = \frac{1}{2} |-26| = \frac{26}{2} = 13$$

9

مساحت ناحیه محدود بین نمودار دو تابع $\rightarrow S_{\triangle ABC} = 13$

فرض کنیم بهروز به تنهایی در x ساعت اینکار را انجام می‌دهد بنابراین فرزاد در $x+9$ ساعت اینکار را انجام می‌دهد. با توجه به اینکه اگر باهم کار کنند این کار در ۲۰ ساعت انجام می‌شود داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20(x+9) + 20x = x(x+9)$$

$$\Rightarrow x^2 - 31x - 180 = 0 \Rightarrow (x-36)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 36 \checkmark \\ x = -5 \text{ غلط} \end{cases}$$

10

بهروز اینکار را به تنهایی در ۳۶ ساعت انجام می‌دهد