۱۹ ۱۹٫۵ سپهر علایی

۱- $\alpha = ۳\beta$ $\alpha + \beta = \frac{۵}{۳}$ $\alpha\beta = \frac{۴}{۳}$ (۲)

$۳\beta + \beta = \frac{۵}{۳} \Rightarrow ۴\beta = \frac{۵}{۳}$

$۱۲\beta = \alpha \Rightarrow$

$۳\beta^۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۹\beta^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \beta = \pm\frac{۲}{۳}$ $\alpha = ۱۲\beta = ۱۲(\pm\frac{۲}{۳}) = \pm ۸$

$\boxed{۸ - (-۸) = ۱۶}$ ✓ ۱۶

۲- $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = ۵ \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta}}}{\frac{۱}{۶}} = ۶\sqrt{S + \frac{۱}{۳}} = ۵$ (۱٫۵)

$\sqrt{S + \frac{۱}{۳}} = \frac{۵}{۶}$

$S + \frac{۱}{۳} = \frac{۲۵}{۳۶}$ ~~$S = \frac{۱۳}{۳۶}$~~ $S = \frac{m + ۱۴}{۳۶} = \frac{۱۳}{۳۶} \Rightarrow \boxed{m = -۱}$ ✓

حاصل ضرب جملات رو می‌خوایم → $P = \frac{c}{a} = \boxed{-۲}$ $y = -x^۲ + ۳x + ۲$

۳-

$x^۲ - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^۲ - ۱x + -۲ = x^۲ - x - ۲$

$(x^۲ - x - ۲)(px + q) \Rightarrow px^۳ - px^۲ + qx^۲ - qx - ۲px - ۲q$ (۲)

$px^۳ + (q - p)x^۲ + (-q - ۲p)x - ۲q \Rightarrow p = ۴$

$-q - ۲p = -۹ \Rightarrow -q - ۸ = -۹$

$q - p = k$ $q = ۱$

$k = q - ۴ \Rightarrow ۱ - ۴ = \boxed{-۳}$ ✓

۴- (۲)

$A = \alpha\beta = \alpha(-۶-\alpha) = -\alpha^۲ - ۶\alpha \Rightarrow$

$۳\alpha^۲ + ۲(-۶-\alpha)^۲ = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵ \Rightarrow ۳\alpha^۲ + ۲\alpha^۲ + ۲۴\alpha + ۷۲ = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$۵\alpha^۲ + ۲۴\alpha + ۷۲ - ۸۵ - ۱۲\sqrt{۲} = ۰ \qquad ۵\alpha^۲ + ۲۴\alpha - ۱۳ - ۱۲\sqrt{۲} = ۰$

$\alpha = \dfrac{-۲۴ \pm \sqrt{۲۴^۲ - ۴\times۵\times(-۱۳-۱۲\sqrt{۲})}}{۱۰} = \dfrac{-۲۴ - \sqrt{۸۳۶ + ۲۴۰\sqrt{۲}}}{۱۰} =$

$\beta = -\dfrac{۳۶ + \sqrt{۸۳۶ + ۲۴۰\sqrt{۲}}}{۱۰}$

یه راه شیک صفحه آخر برات نوشتم :)

$-\alpha^۲ - ۶\alpha = -\dfrac{(۲۴ + \sqrt{۸۳۶ + ۲۴۰\sqrt{۲}})^۲}{۱۰۰} + \dfrac{۱۴۴ - ۶\sqrt{۸۳۶ + ۲۴۰\sqrt{۲}}}{۱۰} = \boxed{۱}$ ✓

$A = ۱$

۵- (۲)

$t = x^۲ \qquad t^۲ - ۷t - ۵ = ۰$

$\dfrac{۷ \pm \sqrt{۶۹}}{۲}$ ← یه ریشه + ⇐ پس + ۲ ریشه دارد $\pm\sqrt{\dfrac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}$ ⇐ $S = ۰$ ، $P = \dfrac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}$

← یه ریشه منفی ✗ ← غ ق ق

$۲P^۲ - ۳SP + ۲S = ۲P^۲$

$۲P^۲ = ۲\left(\dfrac{۴۹ + ۶۹ + ۱۴\sqrt{۶۹}}{۴}\right) = \dfrac{۱۱۸ + ۱۴\sqrt{۶۹}}{۲} = \boxed{۵۹ + ۷\sqrt{۶۹}}$

$۵۹ + ۷\sqrt{۶۹}$ ✓

۶- ۲

$۲x^۲ - ax + b = ۰$ $S = \alpha + \beta = \frac{a}{۲}$

$۲ax^۲ + ax - ۶ = ۰$ $S = \alpha + \beta + ۱ = -\frac{a}{۲a} = -\frac{۱}{۲}$

$\alpha + \beta = \frac{-۱}{۲} = \frac{a}{۲} \Rightarrow a = ۱$

$a = ۱$

$(\alpha - ۰/۵)(\beta - ۰/۵) =$

$\alpha\beta - ۰/۵(\alpha + \beta) + ۰/۲۵ = -۳$

$\alpha\beta - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = -۳$

$\alpha\beta = -۳$

$\left[\frac{ab}{۴}\right] = \left[\frac{۱ \times -۶}{۴}\right] = -۲$ $\frac{b}{۲} = -۳$

$b = -۶$

-۲ ✓

۷- ۲

$۲.\beta^۲ + ۲.\alpha^۲ + ۲.\beta^۲ - ۲.\beta = ۱۷$

$۲.\left[(\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta\right] + ۲.(\beta^۲ - \beta) = ۱۷$

$۲(۱ + \frac{۲b}{a}) + ۲.\frac{b}{a} = ۱۷$ $۲(۱ + \frac{۲b}{a}) + \frac{۲.b}{a} = ۱۷$

$(A - B)^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۴\alpha\beta = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow$

$\alpha - \beta = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \boxed{\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}}$ ✓

۸- ۲۱ ۲

$x_۱ x_۲ = a$ $x_۱ = ۲M - ۱ , x_۲ = ۲M + ۱$

$x_۱ + x_۲ = a + ۱$ $x_۱ + x_۲ = ۴M , x_۱x_۲ = ۴M^۲ - ۱$

$x_۱ + x_۲ = a + ۱ \Rightarrow$ $x_۱ + x_۲ = a + ۱ \Rightarrow ۴M = a + ۱ \Rightarrow a = ۴M - ۱$

$y_۱ = ۲m , y_۲ = ۲m + ۲$ $x_۱ x_۲ = a \Rightarrow ۴M^۲ - ۱ = a \Rightarrow a = ۴M^۲ - ۱$

$y_۱ + y_۲ = ۴m + ۲ = ۱۰$ $۴M - ۱ = ۴M^۲ - ۱ \Rightarrow ۴M^۲ - ۴M = ۰$

$۴m = ۸ \Rightarrow m = ۲ \Rightarrow$ $۴M(M - ۱) = ۰ \Rightarrow M = ۱$

$y_۱ y_۲ = ۴ \times ۲ \times ۳ = \boxed{۲۴}$ $a = ۴M - ۱ = ۳ \Rightarrow x_۱ = ۱ , x_۲ = ۳ \Rightarrow$

$y_۱ = ۴$ $y_۲ = ۶$ $\boxed{P = ۳}$

dotnote

$y_۱ y_۲ - x_۱ x_۲ = ۲۴ - ۳ = ۲۱$ ✓

۹- $x^2 + x - 1 - m^2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -1 \Rightarrow \alpha\beta = -1 - m^2$ (۲)

$\alpha^2 + \beta^2 =$

$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 2 + 2m^2 = 3 + 2m^2$

$m^2 > 0$

$\min(\alpha^2+\beta^2) = 3 \Rightarrow 3 + (2\cdot 0) = 3$ ✓ کمترین مقدار $m = 0$

۱۰- $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{-\omega+2}{2} = -1$ (۲)

$\alpha+\beta = -2 \Rightarrow \frac{2}{2} = -1$

$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \omega \Rightarrow$

$\alpha\beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = a(x^2 + 2x - \frac{1}{2}) \Rightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 = \omega$

$1 = a(1 + 2 - \frac{1}{2})$

$a = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}(x^2 + 2x - \frac{1}{2}) \Rightarrow$

$y = \frac{1}{3}$ ✓

۱۴- $S = -4 \quad P = a$

$\alpha, \beta = \frac{-4 \mp \sqrt{16 - 4a}}{2} \xrightarrow{\alpha < \beta} \alpha = -2 - \sqrt{9 - a}$

$\alpha^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^2 + 2(S^2 - 2P)$

$(-2 - \sqrt{9-a})^2 + 2(16 - 2a) = 12\sqrt{2} + 18 \rightarrow a = 1$