۱۹ سیر علایی

۱- $\alpha=3\beta \quad \alpha+\beta=\frac{a}{3} \quad \alpha\beta=\frac{4}{3}$

$3\beta+\beta=\frac{a}{3} \Rightarrow 4\beta=\frac{a}{3}$

$12\beta=a \Rightarrow$

$3\beta^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \beta^2=\frac{4}{9} \Rightarrow \beta=\pm\frac{2}{3} \qquad a=12\beta=12\left(\pm\frac{2}{3}\right)=\pm 8$

$\boxed{8-(-8)=16}$ ۱۶

۲- $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}}{\frac{1}{6}}=6\sqrt{\delta+\frac{1}{3}}=5$

$\sqrt{\delta+\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}$

$\delta+\frac{1}{3}=\frac{25}{36} \quad \boxed{\delta=\frac{13}{36}} \quad \delta=\frac{m+14}{36}=\frac{13}{36}\Rightarrow \boxed{m=-1}$

۳- $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-1x+-2=x^2-x-2$

$(x^2-x-2)(px+q)\Rightarrow px^3-px^2+qx^2-qx-2px-2q$

$px^3+(q-p)x^2+(-q-2p)x-2q \Rightarrow p=4$

$-q-2p=-9 \Rightarrow -q-8=-9$

$q-p=k \qquad q=1$

$k=q-4 \Rightarrow 1-4=\boxed{-3}$

۴-

$A = \alpha\beta = \alpha(-6-\alpha) = -\alpha^2 - 6\alpha \Rightarrow$

$3\alpha^2 + 2(-6-\alpha)^2 = 12\sqrt{2} + 85 \Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha^2 + 24\alpha + 72 = 12\sqrt{2} + 85$

$5\alpha^2 + 24\alpha + 72 - 85 - 12\sqrt{2} = 0 \qquad 5\alpha^2 + 24\alpha - 13 - 12\sqrt{2} = 0$

$$\alpha = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4\times5\times(-13-12\sqrt{2})}}{10} = \frac{-24 - \sqrt{836 + 240\sqrt{2}}}{10} =$$

$$\beta = -\frac{36 + \sqrt{836 + 240\sqrt{2}}}{10}$$

$$-\alpha^2 - 6\alpha = -\frac{(24 + \sqrt{836 + 240\sqrt{2}})^2}{100} + \frac{144 - 6\sqrt{836 + 240\sqrt{2}}}{10} = \boxed{1}$$

$A = 1$

۵-

$t = x^2 \qquad t^2 - 7t - 5 = 0$

$$\frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$+$: یک ریشه $+$ $\Rightarrow$ $+$ دو ریشه دارد

$-$: یک ریشه منفی $\cancel{X}$ ← غ ق ق

پس

$\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \Rightarrow$

$S = 0$

$P = \frac{7+\sqrt{69}}{2}$

$2p^2 - 3Sp + 2S = 2p^2$

$$2p^2 = 2\left(\frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4}\right) = \frac{118 + 14\sqrt{69}}{2} = \boxed{59 + 7\sqrt{69}}$$

$59 + 7\sqrt{69}$

۶-

$۲x^{۲} - ax + b = ۰ \qquad ۶ - \alpha + \beta = \frac{a}{۲}$

$۲ax^{۲} + ax - ۶ = ۰ \qquad ۶ : \alpha + \beta = -\frac{a}{۲a} = -\frac{۱}{۲}$

$\alpha + \beta = \frac{\cancel{-۱}}{۲} = \frac{a}{۲} \Rightarrow \cancel{a=-۱} \quad a = ۱$

$a = ۱$

$(\alpha - ۰٫۵)(\beta - ۰٫۵) =$

$\alpha\beta - ۰٫۵(\alpha+\beta) + ۰٫۲۵ = -۳$

$\alpha\beta - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = -۳$

$\alpha\beta = -۳$

$\left[\frac{ab}{۴}\right] = \left[\frac{۱ \times -۶}{۴}\right] = -۲ \qquad \frac{b}{۲} = -۳$

$b = -۶$

-۲

۷-

$۲.\beta^{۲} + ۲.\alpha^{۲} + ۲.\beta^{۲} - ۲.\beta = ۱۷$

$۲.\left[(\alpha+\beta)^{۲} - ۲\alpha\beta\right] + ۲.(\beta^{۲} - \beta) = ۱۷$

$۲\left(۱ + \frac{۲b}{a}\right) + ۲.\frac{b}{a} = ۱۷ \qquad ۲\left(۱ + \frac{۲b}{a}\right) + \frac{۲.b}{a} = ۱۷$

$(A - B)^{۲} = (\alpha+\beta)^{۲} - ۴\alpha\beta = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow$

$\alpha - \beta = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \boxed{\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}}$

۸- ۲۱

$x_۱ x_۲ = a \qquad x_۱ = ۲x - ۱ , \; x_۲ = ۲x + ۱$

$x_۱ + x_۲ = a + ۱ \qquad x_۱ + x_۲ = ۴x , \; x_۱ x_۲ = ۴x^{۲} - ۱$

$x_۱ + x_۲ = a + ۱ \Rightarrow \qquad x_۱ + x_۲ = a + ۱ \Rightarrow ۴x = a + ۱ \Rightarrow a = ۴x - ۱$

$y_۱ = ۲m , \; y_۲ = ۲m + ۲ \qquad x_۱ x_۲ = a \Rightarrow ۴x^{۲} - ۱ = a \Rightarrow a = ۴x^{۲} - ۱$

$۴x - ۱ = ۴x^{۲} - ۱ \Rightarrow ۴x^{۲} - ۴x = ۰$

$y_۱ + y_۲ = ۴m + ۲ = ۱۰ \qquad ۴x(x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰ , ۱$

$۴m = ۸ \Rightarrow m = ۲ \Rightarrow \qquad a = ۴x - ۱ = ۳ \Rightarrow x_۱ = ۱ , \; x_۲ = ۳ \Rightarrow$

$y_۱ y_۲ = ۴ \times ۲ \times ۳ = \boxed{۲۴} \qquad \boxed{P = ۳}$

$y_۱ = ۴ \quad y_۲ = ۶$

$y_۱ y_۲ - x_۱ x_۲ = ۲۴ - ۳ = ۲۱$

۹_

$x^2+x-1-m^2=0 \Rightarrow \alpha+\beta=-1 \Rightarrow \alpha\beta=-1-m^2$

$\alpha^2+\beta^2=$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+2+2m^2=3+2m^2$

$m^2 \geq 0$

کمترین مقدار $m=0$

$\min(\alpha^2+\beta^2)=3 \Rightarrow 3+(2\times 0)=3$

۱۰_

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-5+3}{2}=-1$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5 \Rightarrow$

$\alpha\beta=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=a(x^2+2x-\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$1=a(1-2-\frac{1}{2})$

$a=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=-\frac{2}{3}(x^2+2x-\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$y=\frac{1}{3}$

$\alpha+\beta=-2 \Rightarrow \frac{-2}{2}=-1$

$\alpha^2+\beta^2=5$