پاسخ B

تکلیف ۴ — امیر محمد ...

۱

$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}\geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x}\geq\frac{x}{x-1} \to x^2-2x+1\geq x^2 \to 1\geq 2x \to \frac{1}{2}\geq x$

$(-\infty,\frac{1}{2}]$

$\dfrac{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}} \to x\neq -1,\ x\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -2 \quad \mathbb{R}-\{-2,-1,0,1\}$

۲

$\sqrt{\left((\frac{1}{3})^x-9\right)(32-4^x)}\geq 0 \quad 32=4^x \to 32=2^{2x}=2^5 \to x=\frac{5}{2}$

$(\frac{1}{3})^x=9 \to (\frac{1}{3})^x=3^2 \to x=-2$

$\begin{array}{ccccc} & -2 & & \frac{5}{2} & \\ + & | & - & | & + \end{array} \to (-\infty,-2]\cup[\frac{5}{2},+\infty)$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=3$

$x\geq 1 \quad y\geq -1 \quad \sqrt{y+1}=3-\sqrt{x-1}\geq 0 \to 3\geq\sqrt{x-1} \to 9\geq x-1 \to 10\geq x \quad D_f:[1,10]$

۳

$f(x)=\frac{\log_2(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1} \to x^2-x-2>0 \to (x-2)(x+1)>0 \to \begin{array}{ccccc} & -1 & & 2 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$

$x^2\geq 1 \to x\geq 1$

$x\leq -1 \quad \sqrt{x^2-1}\neq -1$ ✓ همواره

$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

۴

$\sqrt{3+ax-x^2}\geq 0 \to [-2,b] \quad a+b=?$

$-(x^2-ax-3)\geq 0 \xrightarrow{-2} 4+2a-3=0 \to 1+2a=0 \to 2a=-1 \to a=-\frac{1}{2}$

$-x^2-\frac{x}{2}+3\geq 0 \to \Delta=\frac{1}{4}-4(-1)(3)=\frac{49}{4} \quad \dfrac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}}{-2} \to \frac{3}{2}$ ✓ $, -2$ ✗

$[-2,\frac{3}{2}] \to b=\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}+(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

۵

$f(x)=\begin{cases}3x-2 & ;x\geq 1\\ 2x+3 & ;x<1\end{cases} \quad g(x)=\sqrt{f(x)-x}\geq 0 \to f(x)\geq x$

$3x-2\geq x \to 2x\geq 2 \to x\geq 1$

$2x+3\geq x \to x\geq -3 \quad \xrightarrow{\cap} [1,+\infty)$

امیر محمد طوحانی

$f(x)=\begin{cases}(a+1)(x+۲) & ; x>1\\ ۳a+۲x & ; x\leq 1\end{cases}$ $\qquad ۲f(۵)=f(-۲)+a \qquad a=?$ ۶

$f(۵)=\frac{f(-۲)}{۲}+\frac{a}{۲} \rightarrow f(۵)=(a+1)(۷)=۷a+۷$

$f(-۲)=۳a-۴ \rightarrow ۷a+۷=\frac{۳a-۴}{۲}+\frac{a}{۲} \rightarrow ۷a+۷=\frac{۴a-۴}{۲}$

$\rightarrow ۱۴a+۱۴=۴a-۴ \rightarrow ۱۰a=-۱۸ \rightarrow a=\frac{-۱۸}{۱۰}$

$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+۲$ $\quad \rightarrow (\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\frac{1}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}+۲)+(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\frac{1}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+۲)$ ۷

$f(۲-\sqrt{۳})+f(۲+\sqrt{۳})=?$

$(\underbrace{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}_{A})+(\frac{1}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}+\frac{1}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}})+۴$

$A^۲=(۲-\sqrt{۳})+(۲+\sqrt{۳})+۲\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})} \rightarrow A=\sqrt{۶}$

$\sqrt{۶}+\sqrt{۶}+۴=۲\sqrt{۶}+۴ \leftarrow \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}}=\frac{A}{\sqrt{1}}=\sqrt{۶}$

$۲f(x)-۳f(-x)=۴x^۲-x$ ۸

$\xrightarrow{-x}\begin{cases}۲f(-x)-۳f(x)=۴x^۲+x\\ ۲f(x)-۳f(-x)=۴x^۲-x\end{cases} \rightarrow ۲f(x)=۴x^۲-x+۳f(-x)$ $\qquad \leftarrow -۴x^۲+\frac{1}{۵}x$

$f(x)=۲x^۲-\frac{x}{۲}+\frac{۳f(-x)}{۲}$

$۲f(-x)=۴x^۲+x+۳f(x) \rightarrow f(-x)=۲x^۲+\frac{x}{۲}+\frac{۳f(x)}{۲}$ $\qquad f(x)=-۴x^۲+\frac{1}{۵}x$

$x=f(-x) \rightarrow f(x)=۲x^۲-\frac{x}{۲}+\frac{۳}{۲}(۲x^۲+\frac{x}{۲}+\frac{۳}{۲}f(x)) \rightarrow -\frac{۵}{۴}f(x)=۵x^۲-\frac{1}{۴}x$

$(x+۲)f(x)-۳f(x+۲)=۴x^۲-mx+۳m-1 \qquad f(۰)=?$ ۹

$\xrightarrow{f(۰)} ۲f(۰)=۳m-1 \rightarrow f(۰)=\frac{۳m-1}{۲}$

$\xrightarrow{f(-۲)} ۶f(۰)=۱۶+۲m+۳m-1 \qquad ۳f(۰)=۸+m+\frac{۳m-1}{۲} \rightarrow ۲f(۰)=۸+m$

$\frac{۸+m}{۲}=\frac{۳m-1}{۲} \rightarrow ۱۶+۲m=۶m-۲ \rightarrow m=\frac{۱۸}{۴}$ $\qquad f(۰)=\frac{۸+m}{۲}$

$\xrightarrow{m=\frac{۱۸}{۴}} \frac{۱۸}{۴}+۸=\frac{۵۰}{۴}\times\frac{1}{۲}=\frac{۲۵}{۴}$

$ax+b \;/\; f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x} \;/\; f(-1)=?$ ۱۰

$f(x)+f(\frac{1}{x})=ax+b+a(\frac{1}{x})+b=ax+\frac{a}{x}+۲b$

$ax+\frac{a}{x}+۲b \rightarrow \frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x} \rightarrow ۳x-۱۲+\frac{۳}{x}$

$\frac{a}{x}=\frac{۳}{x} \rightarrow a=۳ \qquad a=۳ \quad ۲b=-۱۲ \rightarrow b=-۶$

$\rightarrow f(x)=۳x-۶ \rightarrow f(-1) \rightarrow ۳(-1)-۶=-۹$