Subject.
Date.

۱۹/۷۵

تکلیف شماره ۴ یازدهم مبران $\underline{B}$ امیرپویا سایزداق

① الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}}$

شرط ۱ → $x\neq ۰$
شرط ۲ → $x\neq ۱$
شرط ۳ → $\frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}\geqslant ۰$

$\Rightarrow \frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}\geqslant ۰ \underset{\text{مخرج مشترک}}{\Longrightarrow} \frac{(x-۱)^۲-x^۲}{x^۲-x}\geqslant ۰ \Rightarrow \frac{۱-۲x}{x(x-۱)}\geqslant ۰$

$\begin{array}{ccccccc} & ۰ & & ۰/۵ & & ۱ & \\ \hline + & \varnothing & - & | & + & \varnothing & - \end{array}$

ریشه ← $\frac{۱}{۲}=۰/۵$

$\Rightarrow$ شرط ۳ → $(-\infty,۰)\cup[۰/۵,۱)$

① ∩ ② ∩ ③ $\Rightarrow D_f=(-\infty,۰)\cup[۰/۵,۱)$ ✓

۲

ب) $f(x)=\dfrac{\frac{۱}{x+۱}-\frac{۲}{x}}{\frac{۳}{x-۱}+\frac{۱}{x+۲}} \Rightarrow$

شرط ۱ → $x\neq -۱$
شرط ۲ → $x\neq ۰$
شرط ۳ → $x\neq ۱$
شرط ۴ → $x\neq -۲$
شرط ۵ → $\frac{۳}{x-۱}+\frac{۱}{x+۲}\neq ۰ \underset{\text{مخرج مشترک}}{\Longrightarrow} \frac{۳x+۶+x-۱}{(x-۱)(x+۲)}\neq ۰$
$\Rightarrow \boxed{\frac{۴x+۵}{(x-۱)(x+۲)}\neq ۰}$

شرط ⑤
$\Rightarrow ۴x+۵\neq ۰ \Rightarrow \boxed{x\neq \frac{-۵}{۴}}$

① ∩ ② ∩ ③ ∩ ④ ∩ ⑤
$\boxed{\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۲,\frac{-۵}{۴},-۱,۰,۱\}}$ ✓

شرط ۱ → $\left((\frac{۱}{۳})^x-۹\right)\left(۳۲-۴^x\right)\geqslant ۰$

(2) الف) $f(x)=\sqrt{\left((\frac{۱}{۳})^x-۹\right)\left(۳۲-۴^x\right)}$

$(\frac{۱}{۴})^x-۹=۰ \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^x=۳^۲=\frac{۱}{۳}^{-۲} \Rightarrow \boxed{x=-۲}$

۲

$۳۲-۴^x=۰ \Rightarrow ۲^۵-۴^x=۰ \Rightarrow ۲^۵=۴^x=۲^{۲x} \Rightarrow ۲x=۵ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۵}{۲}}$

$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -۲ & & \frac{۵}{۲} & \\ \hline + & \phi & - & \phi & + \end{array} \Rightarrow \boxed{D_f=(-\infty,-۲]\cup[\frac{۵}{۲},+\infty)}$ ✓

ب) $\sqrt[۴]{x-۱}+\sqrt{y+۱}=۳ \rightarrow$ شرط ۱ $x-۱\geqslant ۰ \Rightarrow \boxed{x\geqslant ۱}$
شرط ۲ $y+۱\geqslant ۰$

$\sqrt{y+۱}=۳-\sqrt[۴]{x-۱} \Rightarrow ۳-\sqrt[۴]{x-۱}\geqslant ۰ \Rightarrow \sqrt[۴]{x-۱}\leqslant ۳ \Rightarrow x-۱\leqslant ۳^۴=۸۱$

$\Rightarrow x-۱\leqslant ۸۱ \Rightarrow \boxed{x\leqslant ۸۲}$ شرط دوم

① ∩ ② $\Rightarrow D_f=\boxed{[۱,۸۲]}$ ✓

PAPCO

③ $\dfrac{\log_{۲}^{(x^۲-x-۲)}}{\sqrt{x^۲-۱}+۱}$ ⇒ ① شرط $(x^۲-x-۲)>۰$

② شرط $x^۲-۱\geq ۰$

مخرج هیچگاه صفر نمی‌شود ⇐ نامنفی

$\boxed{(-\infty,-۱)\,,\,(۲,+\infty)}$ ① ②

$x^۲-x-۲=(x+۱)(x-۲)\Rightarrow$ ریشه‌ها $= \begin{matrix}-۱\\ ۲\end{matrix}\Rightarrow$

	-۱		۲	
+	○	−	○	+

$x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow(x-۱)(x+۱)\Rightarrow$ ریشه‌ها $= \begin{matrix}-۱\\ +۱\end{matrix}\Rightarrow$

	-۱		۱	
+	●	−	●	+

$\Rightarrow \boxed{(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)}$ ② $\boxed{①\cap②\Rightarrow D_f=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)}$ ✓

④ $\sqrt{۳+ax-x^۲}$ در بازه ⇐ $[-۲,b]$, $a+b=?$

$x^۲\Rightarrow$ منفی در زیر رادیکال $\Rightarrow D=[x,y]$ (x و y ریشه‌ها هستند) $\Rightarrow D_{\text{تابع}}=[-۲,b]$

$\Rightarrow -۲,b=$ ریشه‌ها , $x=-۲\Rightarrow ۳-۲a-۴=۰\Rightarrow -۱-۲a=۰$ ②

$\Rightarrow -۲a=۱\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$ ✓ $\Rightarrow x^۲-\frac{۱}{۲}x+۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=-۲\\ x_۲=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}\end{cases}$ ✓

$\Rightarrow a+b=-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=$ ① ✓

⑤ $f(x)=\begin{cases}۳x-۲\,, & x\geq ۱\\ ۲x+۳\,, & x<۱\end{cases}$ $D_g=?$ $\left(g(x)=\sqrt{f(x)-x}\right)$

شرط ۱ $\rightarrow f(x)-x\geq ۰$

$f(x)=۳x-۲\Rightarrow f(x)-x\geq ۰\Rightarrow ۳x-۲-x\geq ۰\Rightarrow ۲x-۲\geq ۰$

$\Rightarrow ۲(x-۱)\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱$ ① , $f(x)=۲x+۳\Rightarrow f(x)-x\geq ۰$

$\Rightarrow ۲x+۳-x\geq ۰\Rightarrow x+۳\geq ۰\Rightarrow x\geq -۳\Rightarrow -۳\leq x\leq ۱$ ② ②

$①\cap② = [۱,+\infty)\cup[-۳,۱)\Rightarrow \boxed{D_g=[-۳,+\infty)}$ ✓

Subject.

Date.

⑥ $f(x) = \begin{cases} (a+۱)(x+۲) : x > ۱ \\ ۳a + ۲x : x \leq ۱ \end{cases}$

$۲f(۵) = f(-۲) + a$

$a = ?$

$x = -۲ \rightarrow f(-۲) = ۳a + \boxed{۲(-۲) = ۳a - ۴}$

$x = ۵ \rightarrow \boxed{۲f(۵) = ۲ \times ۷(a+۱) = ۱۴a + ۱۴}$, $۲f(۵) = f(-۲)$ (۲)

$\Rightarrow ۳a - ۴ + a = ۱۴a - ۱۴ \Rightarrow ۴a - ۴ = ۱۴a - ۱۴ \Rightarrow ۱۰a = -۱۸$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{-۱۸}{۱۰} = -۱٫۸}$ (۴ ✓) ✓

⑦ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}} + ۲$, $f(۲-\sqrt{۳}) + f(۲+\sqrt{۳}) = ?$

$f(x) + f\frac{۱}{x} = (\sqrt{x} + ۲ + \frac{۱}{\sqrt{x}}) + (\frac{۱}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + ۲) = ۲(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{۱}{x}}) + ۴$

$x = ۲ + \sqrt{۳} \Rightarrow f(۲+\sqrt{۳}) + f(۲-\sqrt{۳}) = ۲(\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \sqrt{۲-\sqrt{۳}}) + ۴$

$y^۲ = (\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \sqrt{۲-\sqrt{۳}})^۲ = ۲ + \sqrt{۳} + ۲ - \sqrt{۳} + \sqrt{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})} \times ۲$

$\Rightarrow y^۲ = ۲ + ۲ + ۲\sqrt{۱} = ۳(۲) = ۶ \Rightarrow y^۲ = ۶ \Rightarrow y = \sqrt{۶} = (\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \sqrt{۲-\sqrt{۳}})$

$f(۲+\sqrt{۳}) + f(۲-\sqrt{۳}) = ۲(\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \sqrt{۲-\sqrt{۳}}) + ۴$ (۲)

$\Rightarrow f(۲+\sqrt{۳}) + f(۲-\sqrt{۳}) = \boxed{۲\sqrt{۶} + ۴}$ ✓

⑧ $۲f(x) - ۳f(-x) = ۴x^۲ - x$, $f(x) = ?$

$۲f(x) - ۳f(-x) = ۴x^۲ - x \Rightarrow \begin{cases} ۴f(x) - ۶f(-x) = ۸x^۲ - ۲x \\ ۶f(-x) - ۹f(x) = ۱۲x^۲ + ۳x \end{cases}$

$۲f(-x) - ۳f(x) = ۴x^۲ + x \Rightarrow$

$-۵f(x) = ۲۰x^۲ + x \Rightarrow$ جمع

$\boxed{f(x) = -۴x^۲ - \frac{x}{۵}}$ ✓ (۲)

PAPCO

Scanned by TapScanner

(۹)

$(x+۲)\ f(x) - ۳x f(x+۲) = ۴x^۲ - mx + ۳m - ۱$

$f(۰) = ?$

$x = -۲ \rightarrow (-۲+۲)\ f(-۲) + ۴f(۰) = ۱۶ + ۲m + ۳m - ۱ \Rightarrow$

$۴f(۰) = ۱۶ + ۵m - ۱ \Rightarrow \boxed{۴f(۰) = ۱۵ \times ۵m} \Rightarrow$

$x = ۰ \rightarrow (۰+۲)\ f(۰) - ۳(۰)\ f(۲) = ۳m - ۱ \Rightarrow ۲f(۰) = ۳m - ۱ \Rightarrow ۶f(۰) = ۹m - ۳$

$$\begin{cases} ۶f(۰) = ۵m + ۱۵ \\ ۶f(۰) = ۹m - ۳ \end{cases} \Rightarrow ۹m - ۳ = ۵m + ۱۵ \Rightarrow ۴m = ۱۸ \Rightarrow m = \frac{۹}{۲}$$ ✓

$\Rightarrow ۶f(۰) = ۵m + ۱۵ \Rightarrow ۴f(۰) = \frac{۴۵}{۲} + ۱۵$ (۱٫۷۵)

$\Rightarrow ۴f(۰) = \frac{\frac{۷۵}{۲}}{۴} = \boxed{\cancel{\frac{۷۵}{۱۲}} = f(۰)}$ $\frac{۲۵}{۴}$ دقت!

(10)

$f \rightarrow$ تابع خطی ، $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{۳x^۲ - ۱۲x + ۳}{x}$ ، $f(-۱) = ?$

$f(x) \rightarrow$ تابع خطی $\Rightarrow f(x) + f(\frac{1}{x}) = ax + b + \frac{a}{x} + b = ax + \frac{a}{x} + ۲b$ (۲)

$\Rightarrow {}^{۲}f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{۳x^۲ - ۱۲x + ۳}{x} \Rightarrow \frac{۳x^۲ - ۱۲x}{x} + \frac{۳}{x} \Rightarrow ۳x + \frac{۳}{x} - ۱۲$

$\Rightarrow a = ۳ ,\ ۲b = -۱۲ \Rightarrow b = -۶ \Rightarrow f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = ۳x - ۶$

$\Rightarrow f(-۱) = ۳(-۱) - ۶ \Rightarrow f(-۱) = -۳ - ۶ = -۹ \Rightarrow \boxed{f(-۱) = -۹}$ ✓