

الف) $\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} \geq 0$ $\xrightarrow{\text{فقط جزئی}}$ $\frac{(x-1)^2 - x^2}{x(x-1)} \geq 0$ $\xrightarrow{\text{صورت مزدوج}}$ $\frac{-1}{x(x-1)} \geq 0$

ب) $\frac{2x-1}{x(x-1)} \leq 0$ $\rightarrow$ $D_f = (-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ ✓

در اینجا $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \neq 0 \rightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} \neq 0 \rightarrow 2x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

$x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

$D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, -1, 1\}$ ✓

الف) $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x} \geq 0$ $\rightarrow$ $\frac{x^2 - 2(x-2)}{x(x-2)} \geq 0$ $\rightarrow$ $\frac{x^2 - 2x + 4}{x(x-2)} \geq 0$

ب) $\frac{x^2 - 2x + 4}{x(x-2)} \geq 0$ $\rightarrow$ $x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 16 = -12 < 0$ $\rightarrow$ $x^2 - 2x + 4 > 0$ $\forall x$

پس علامت $\frac{x^2 - 2x + 4}{x(x-2)}$ به علامت $x(x-2)$ بستگی دارد.

$x(x-2) > 0 \rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 2$

$x(x-2) < 0 \rightarrow 0 < x < 2$

پس $D_f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ✓

فرجه ۴ با فرجه ۲ ندارد

$\sqrt{y+1} = 3 - \sqrt{x-1} \rightarrow \sqrt{y+1} + \sqrt{x-1} = 3$

$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$y+1 \geq 0 \rightarrow y \geq -1$

$D_f = [1, +\infty) \times [-1, +\infty)$

فرض همواره مثبت است

$f(x) = \log_f(x^2 - x - 2)$ $\rightarrow$ $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1 + 1}$

$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1 + 1} \geq 0$ $\rightarrow$ $\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \geq 0$ $\rightarrow$ $\frac{x-2}{x} \geq 0$

$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

$x < 0$ $\rightarrow$ $\frac{x-2}{x} \geq 0 \rightarrow x-2 \leq 0 \rightarrow x \leq 2$

$D_f = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$ ✓

چونکه بازه دو طرفش بسته است پس اگر به جای x a و b قرار دهیم زیر ادیان منفی شود

$3 + a - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 3 + a$ $\rightarrow$ $x = \pm \sqrt{3+a}$

$3 + a - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 3 + a$ $\rightarrow$ $x = \pm \sqrt{3+a}$

$3 + a - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 3 + a$ $\rightarrow$ $x = \pm \sqrt{3+a}$

$3 + a - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 3 + a$ $\rightarrow$ $x = \pm \sqrt{3+a}$

$3 + a - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 3 + a$ $\rightarrow$ $x = \pm \sqrt{3+a}$

الف) $\sqrt{x+3} - x \geq 0$ $\rightarrow$ $\sqrt{x+3} \geq x$

اگر $x \geq 1$ $\rightarrow$ $3x - 2 - x \geq 0 \rightarrow 2x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

اگر $x < 1$ $\rightarrow$ $2x + 3 - x \geq 0 \rightarrow x \geq -3$

پس $D_f = [-3, 1]$ ✓

این جدول بازه قبل هست نیازی به نوشتن نداره

$$2(a+1)(7) = 3a - 1 + a$$

جایگذاری می‌کنیم

$$\rightarrow 14a + 14 = 4a - 1 \rightarrow 10a = -15 \rightarrow a = -\frac{15}{10}$$

$$\rightarrow a = -\frac{3}{2} \quad \checkmark$$

۲

۶

~~حل می‌کنیم و جواب می‌دهیم~~

۱, ۲, ۵

۷

بیا $f(x)$ و $x = -x$ قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} 2f(x) - 3f(-x) = 5x^2 - 4x \\ -3f(x) + 2f(-x) = 5x^2 + 4x \\ -2f(-x) + 3f(x) = 8x^2 - 4x \\ 4f(-x) - 9f(x) = 12x^2 + 8x \end{cases}$$

$$-4f(x) = 10x^2 + 4x \rightarrow f(x) = -\frac{5}{2}x^2 - x \quad \checkmark$$

۲

۸

بیا $x=0$ و $x+y=0$ قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} 2f(0) &= 3m - 1 \times m \\ 4f(0) &= 14 + 2m + 2m = 1 \\ 4m &= 17 \rightarrow m = \frac{17}{4} \quad \checkmark \\ f(0) &= \frac{3m+1}{2} \rightarrow \frac{17}{8} \quad \checkmark \end{aligned}$$

۲

۹

$$ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{3x^2 - 14x + 3}{x} \rightarrow \frac{ax^2 + 2bx + a}{x} = \frac{3x^2 - 14x + 3}{x}$$

$$a=3 \quad 2b=-14 \rightarrow b=-7$$

$$f(x) = 3x - 7 \rightarrow f(-1) = -3 - 7 = -10 \quad \checkmark$$

۴

۱۰

$f(2-\sqrt{3}) \neq f(2+\sqrt{3})$ پس در صورتیکه برابر است پس

$$\begin{aligned} \hookrightarrow f(2-\sqrt{3}) + f(2+\sqrt{3}) &= 2f(2+\sqrt{3}) - 2f(2-\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}) + 4 = 2\sqrt{2} + 4 \\ 2(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} + 2) &\rightarrow 2\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 4 = \sqrt{8-4\sqrt{3}} + \sqrt{8+4\sqrt{3}} + 4 \\ &= \sqrt{4(2-\sqrt{3})} + \sqrt{4(2+\sqrt{3})} + 4 = \sqrt{4(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{4(1+\sqrt{3})^2} + 4 = \\ (1-\sqrt{3})\sqrt{4} + (1+\sqrt{3})\sqrt{4} + 4 &\rightarrow \sqrt{4}(1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}) + 4 = 2\sqrt{4} + 4 \end{aligned}$$

۱,۲۵

۷