

الف) $\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} \geq 0$ $\xrightarrow{\text{فرض کنیم}}$ $\frac{(x-1)^2 - x^2}{x(x-1)} \geq 0$ $\xrightarrow{\text{صورت مزدوج}}$ $\frac{-1}{x(x-1)} \geq 0$

ب) $\frac{2x-1}{x(x-1)} \leq 0$ $\xrightarrow{\text{در مخرج}}$ $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} \neq 0$ $\rightarrow \frac{x+x-1}{x(x-1)} \neq 0 \rightarrow 2x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

ج) $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$
 $x \neq 0$
 $x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$
 $x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, -1, 1 \right\}$

الف) $\left(\frac{x}{3}\right)^x \rightarrow 3^{-x}$ $(3^{-x} - 3^2)(3^5 - 3^x) \geq 0$ $\xrightarrow{\text{تقسیم علامت}}$ $\frac{x}{3} - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 6$

ب) $\frac{x}{3} - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 6$ $\rightarrow D_f = [6, +\infty)$

ج) $\sqrt{y+1} = 3 - \sqrt{x-1}$ $\xrightarrow{\text{مربع کردن}}$ $y+1 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x-1$ $\rightarrow y = x - 6\sqrt{x-1}$

فرجه ۴ با فرقی ندارد

فرض همواره مثبت است

$f(x) = \log_f(x^2 - x - 2)$ $\xrightarrow{\text{فقط بزرگتر از ۱}}$ $\frac{x-1}{x+2} \geq 1$ $\rightarrow \frac{x-1}{x+2} - 1 \geq 0$ $\rightarrow \frac{-x-3}{x+2} \geq 0$ $\rightarrow x \leq -2$

$x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$ $\rightarrow x \leq -1$ یا $x \geq 1$

$\frac{x-1}{x+2} \geq 1$ $\rightarrow x \leq -2$

$D_f = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

چونکه بازه دو طرفش بسته است پس اگر به جای x از $2-b$ قرار دهیم زیرادیکال منفی نمیشود

$3 + a - x^2 = 0 \rightarrow 3 - 2a - 4 = 0 \rightarrow -2a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$3 + \frac{1}{4}x - x^2 = 0 \xrightarrow{x=b} -b^2 - \frac{b}{4} + 3 = 0 \rightarrow b^2 + \frac{b}{4} - 3 = 0$ $\xrightarrow{\text{ضرب در ۴}}$ $4b^2 + b - 12 = 0$ $\rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+192}}{8} = \frac{-1 \pm 13}{8}$ $\rightarrow b = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ یا $b = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4}$

$a+b \rightarrow \frac{3}{2} - \frac{7}{4} = \frac{6-7}{4} = -\frac{1}{4}$

$\sqrt{f(x)} - x$ $\xrightarrow{x \geq 1}$ $3x - 2 - x \geq 0 \rightarrow 2x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$\xrightarrow{x < 1}$ $2x + 3 - x \geq 0 \rightarrow x \geq -3$ $\xrightarrow{\text{اشاره به}}$ $-3 \leq x < 1$

$D_g = [-3, +\infty) \cup [1, +\infty)$

$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & ; x \geq 1 \\ \sqrt{x+3} & ; -3 \leq x < 1 \end{cases}$

$$2(a+1)(7) = 3a - 1 + a$$

جایگذاری می‌کنیم

$$\rightarrow 14a + 14 = 4a - 1 \rightarrow 10a = -15 \rightarrow a = -\frac{15}{10}$$

$$\rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۶

~~حل می‌کنیم و جواب می‌دهیم~~

~~حل می‌کنیم و جواب می‌دهیم~~

~~حل می‌کنیم و جواب می‌دهیم~~

~~حل می‌کنیم و جواب می‌دهیم~~

۷

$$\begin{cases} 2f(x) - 3f(-x) = 5x^2 - 4x \\ -3f(x) + 2f(-x) = 5x^2 + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2f(-x) + 3f(x) = 8x^2 - 4x \\ 4f(-x) - 9f(x) = 12x^2 + 8x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4f(-x) - 9f(x) = 12x^2 + 8x \end{cases}$$

$$4f(-x) = 12x^2 + 8x \rightarrow f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2}$$

۸

$$2f(0) = 3m - 1 \times 3$$

$$x+y=0 \rightarrow x=-y$$

$$4f(0) = 14 + 2m + 3m - 1$$

$$\rightarrow 4f(0) = 3f(0) = 9m - 1 = 14 + 3m$$

$$5m = 15 \rightarrow m = 3$$

$$f(0) = \frac{3m+1}{2} \rightarrow \frac{10}{2} = 5$$

۹

$$ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{3x^2 - 12x + 3}{x}$$

$$\rightarrow \frac{3x^2 + 2bx + a}{x} = \frac{3x^2 - 12x + 3}{x}$$

$$a=3 \quad 2b=-12 \rightarrow b=-6$$

$$f(x) = 3x - 6 \rightarrow f(-1) = -3 - 6 = -9$$

۱۰

$f(2-\sqrt{3}) \neq f(2+\sqrt{3})$ پس متساوی نیست پس

$$\hookrightarrow f(2-\sqrt{3}) + f(2+\sqrt{3}) = 2f(2+\sqrt{3}) - 2f(2-\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} + 2) &\rightarrow 2\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 4 = \sqrt{8-4\sqrt{3}} + \sqrt{8+4\sqrt{3}} + 4 \\ &= \sqrt{4(2-\sqrt{3})} + \sqrt{4(2+\sqrt{3})} + 4 = \sqrt{4(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{4(1+\sqrt{3})^2} + 4 = \\ (1-\sqrt{3})\sqrt{4} + (1+\sqrt{3})\sqrt{4} + 4 &\rightarrow \sqrt{4}(1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}) + 4 = 2\sqrt{4} + 4 \end{aligned}$$