

۱۹, ۲۵

به نام خدا

ونراد حاجی بابائی - یازدهم پسر B - تکلیف شماره ۵ - توابع و خواص آنها

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x-2} - 1 \Rightarrow f(x+1) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x-1} - 1$$

(۲) ①

$$y = \sqrt{x^2 f(x+1)} \Rightarrow x^2 \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{x-1} - 1 \right) \geq 0 \Rightarrow \frac{0}{-1+1} \Rightarrow D_f = [0, 1]$$

$$f(x) = \sqrt{x + |x+2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{|2-x| - x} \Rightarrow |2-x| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow |2-x| \geq x$$

حالت نری بر اساس قدر مطلق:

$$x \leq 2 \rightarrow 2-x \geq x \Rightarrow 2 \geq 2x \Rightarrow 1 \geq x \checkmark$$

(۲) ②

$$x > 2 \rightarrow x-2 \geq x \Rightarrow -2 \geq 0 \times \rightarrow \text{این فرضیه غیر قابل قبول است زیرا هیچگاه}$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 1] \checkmark$$

$-2 \geq 0$ ممکن نشود

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{f(x)}} \Rightarrow \frac{x-1}{f(x)} \geq 0 \quad (f(x) \neq 0)$$

	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x-1$	-	-	-	-	+	+	+	+
$f(x)$	+	-	-	-	-	+	+	+
y	-	+	+	+	-	+	+	+

$$\Rightarrow D_f = (-4, 1] \cup (2, 3) \checkmark$$

Arman

(۲) ③

$$y_1 = \frac{1}{9x^2 - 4x - 3} \rightarrow y_1 = \frac{1}{(3x^2 + x + 1)(3x^2 - x - 3)}$$

$$1. 3x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 12 < 0$$

$$2. 3x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 36 > 0$$

(۲)

(۴)

عبارت شماره ۱ ریشه حقیقی ندارد اما عبارت شماره ۲ دو ریشه حقیقی متقابله دارد

پس دامنه این تابع شامل اعداد حقیقی (IR) به غیر از ریشه های عبارت دوم می شود

و اگر دامنه این تابع با تابع $(y_2 = \frac{1}{3x^2 + ax + b})$ برابر باشد، ریشه منفرجه می گیریم که:

$$3x^2 - x - 3 = 3x^2 + ax + b \Rightarrow a = -1, b = -3$$

$$\Rightarrow \sqrt{-(a+b)} \Rightarrow \sqrt{-(-1-3)} \Rightarrow \sqrt{-(-4)} \Rightarrow \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \sqrt{-(a+b)} = 2 \checkmark$$

$$y = \sqrt{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)} \quad , \quad f(x) = x^3 + x$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} -2 & 0 & 2 & \\ \hline - & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x^3 + x \geq \frac{4x}{x^2} + \frac{x}{x}$$

$$\Rightarrow x^4 + x^2 \geq 4x + \frac{x^2}{x} \Rightarrow x^4 + x^2 - 4x - 1 \geq 0$$

دامنه اعضاء نه (صفحه اخف نه)

$$\Rightarrow (x-2)(x+2)(x^2 + 5x^2 + 14) \geq 0$$

$$t = x^2 \Rightarrow t^2 + 5t + 14 \Rightarrow \Delta = 25 - 56 < 0$$

چون دلتای این عبارت منفی است پس ریشه حقیقی ندارد (و دیگر تجزیه پذیری نیست)

$$(x-2)(x+2)(x^2 + 5x^2 + 14) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} -2 & 2 & & \\ \hline + & - & + & \end{array} \Rightarrow D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$f(x^3 + x) = 2x^2 - 1 \quad , \quad x=1 \rightarrow f(2) = 2(1) - 1 \Rightarrow \boxed{f(2) = 1}$$

$$x=2 \rightarrow f(2^3 + 2) = 2(4) - 1 \Rightarrow \boxed{f(10) = 7}$$

(۲)

(۶)

$$f(10) + f(2) = 7 + 1 = 8 \Rightarrow \boxed{f(2) + f(10) = 8} \checkmark$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 12x = (x-2)^3 + 16 \quad \checkmark$$

$$g(x) = x^3 + 9x^2 + 27x = (x+3)^3 - 27 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{V} - 3 \quad \text{و} \quad x_2 = \sqrt[3]{K} + 2$$

(1, 75)



$$g(\sqrt[3]{V} - 3) \rightarrow x_1 + 3 = \sqrt[3]{V} \Rightarrow g(x_1) = (x_1 + 3)^3 - 27 \Rightarrow V - 27 = -20$$

$$f(\sqrt[3]{K} + 2) \rightarrow x_2 - 2 = \sqrt[3]{K} \Rightarrow f(x_2) = (x_2 - 2)^3 + 16 \Rightarrow K + 16 = 10$$

$$\frac{g(\sqrt[3]{V} - 3)}{f(\sqrt[3]{K} + 2)} = \frac{-20}{10} = -2 \Rightarrow \text{جواب نهایی: } -2$$

$$f(x) = \sqrt{x+K\sqrt{x-K}} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-K\sqrt{x-K}} \quad ; \quad x \geq K$$

$$f(x) + g(x) = \sqrt{x+K\sqrt{x-K}} + \sqrt{x-K\sqrt{x-K}} = A$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sqrt{x+K\sqrt{x-K}} + \sqrt{x-K\sqrt{x-K}})^2$$

$$= x + K\sqrt{x-K} + x - K\sqrt{x-K} + 2\sqrt{x^2 - 14(x-K)}$$

$$x^2 - 14x + 4K = (x-A)^2$$

$$\Rightarrow 2x + 2\sqrt{(x-A)^2} \Rightarrow 2x + 2|x-A|$$

$$K \leq x \leq A$$

الآن این قدر مطلق را دو حالت

$$K \leq x \leq A \Rightarrow 2x + 14 - 2x \Rightarrow A^2 = 14 \Rightarrow A = K$$

$$A \leq x \rightarrow 2x + 2x - 14 \Rightarrow A^2 = 4x - 14 \Rightarrow A = 2\sqrt{x-K}$$

جواب به اینک در صورت سوال گفته شده که

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} K & K \leq x \leq A \\ 2\sqrt{x-K} & A \leq x \end{cases}$$

است و باید به این فرم مقایسه

$$2\sqrt{x-K} = a + b\sqrt{x+c} \Rightarrow a=0, b=2, c=-K$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{0+2}{-K} = -\frac{2}{K} \Rightarrow \frac{a+b}{c} = -\frac{2}{K}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-1)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g(x) = \{(1,1), (1,0), (3,4), (0,4)\}$$

(2)

9

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\} \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \{1, 0\}$$

$$\frac{g}{f} = \{(1, \frac{-1}{1}), (0, \frac{4}{1})\} \Rightarrow \frac{g}{f} = \{(1, -1), (0, 4)\}$$

$$f(x) = \{(1,1), (3,-1), (1,1), (-1,4)\}$$

(2)

$$g(x) = \{(-2,3), (1,-1), (3,2), (-1,0)\}$$

$$a) f(2x) = \{(\frac{1}{2}, 1), (\frac{3}{2}, -1), (2, 1), (-\frac{1}{2}, 4)\}$$

$$b) f(x^2) = \{(1,1), (-1,1), (\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, -1), (2,1), (-2,1)\}$$

$$c) 2g^r(x)+1 = \{(-2, 19), (1, 3), (3, 9), (1, 1)\}$$

10

$$\Rightarrow \frac{2f}{g} \Rightarrow 2f = \{(1,4), (3,-2), (1,4), (-1,12)\}$$

$$\Rightarrow \frac{2f}{g} = \{(1,-4), (3,-1)\}$$