نام و نام خانوادگی ...آرمین حسین‌فر... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۹... کلاس ...یازدهم ریاضی B...

۱

$$f(x) = \begin{cases} \cot\frac{\pi x}{4} & ; x \le 1 \\ \sqrt{x^2+1} & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f\circ f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3+1} = 2$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \cot\frac{\pi\times 2}{4\times 3} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \simeq 1/7$$

۲

الف) $g(x) = 2\cos^2 x \quad , \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$

$$f\circ g\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad / \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x=2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ب) $g(x) = \frac{x}{1-x} \quad , \quad f(x) = [x] \longrightarrow g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \xrightarrow{\sqrt{2}\simeq 1/4} \frac{1/4}{1-1/4} \simeq -3/5$

$$f\circ g(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f(-3/5) = [-3/5] = -4$$

۳

$f(x) = \sin x \quad / \quad g(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$$g\circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۴

$g(x) = \{(4,6),(2,4),(6,8),(8,10)\} \quad / \quad f(x) = \{(4,5),(6,5),(8,12),(10,12)\}$

الف) $f\circ g(x) = \{(4,5),(2,5),(6,12),(8,12)\}$

ب) $g\circ f(x) = \varnothing$

ج) $f\circ f(x) = \varnothing$

د) $g\circ g(x) = \{(4,8),(2,6),(6,10)\}$

۵

$f = \{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\} \qquad g = \{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$

$(4,2) \in f\circ g \to f(g(4)) = 2 \to g(4) = 3 \to a = 4$

$(4,1) \in g\circ f \to g(f(4)) = 1 \to f(4) = b \to b = 5$

$(a,b) = (4,5)$

$f(f(x))=۴x+۳$

$f(x)=ax+b \longrightarrow f(\underbrace{ax+b}_{ax+b})=a^۲x+ab+b=۴x+۳$ ⟶ $a=۲\ ,\ b=۱ \to f(x)=۲x+۱$ ، $a=-۲\ ,\ b=-۳ \to f(x)=-۲x-۳$

$\boxed{f(-۱)=-۱}$

$g\circ f(-۱)=g(\underbrace{f(-۱)}_{-۱})=g(-۱)=\boxed{-۸}$ ۶

$۲x+۳=-۱$
$x=-۲$

$g(۲x+۳)=۳x-۲$
$x=-۲ \to \boxed{g(-۱)=-۸}$

$D_{g\circ f}=? \longrightarrow =\{\underbrace{x\in D_f}_{\mathbb{R}} \cap : \underbrace{f(x)\in D_g}_{\mathbb{R}-(-\infty,۰]\cup\{۸\}}\}=D_{g\circ f}=(۰,+\infty)-\{۸\}$

$g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x} \longrightarrow$
$۰,\ x^۲-۴x$

$f(x)=\sqrt{x+|x|}$ $\begin{cases}\sqrt{۲x} & ; x\geq ۰ \ (۱)\\ ۰ & ; x<۰\end{cases}$ $\longrightarrow \sqrt{۲x}\geq ۰ \to x\geq ۰ \ (۲) \xrightarrow{۱\cap ۲} x\geq ۰$ ۷

$D_f=\mathbb{R}$

$D_g=\mathbb{R}-\{۰,۴\} \to f(x)\neq ۰ \to x\neq(-\infty,۰] \Longrightarrow x\neq(-\infty,۰]\cup\{۸\}$

$f(x)\neq ۴ \to \sqrt{۲x}\neq ۴ \to x\neq ۸$

$D(f+g)\circ f \ / \ g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{۱-x^۲} \to D_f \Longrightarrow ۱-x^۲\geq ۰ \to -۱\leq x\leq ۱$

$D_g=[۰,+\infty)$

$D_{(f+g)\circ f}=\{\underbrace{x\in D_f}_{-۱\leq x\leq ۱} \cap : \underbrace{f(x)\in D_{f+g}}_{-۱\leq x\leq ۱}\}=[-۱,۱]$ ۸

$D_{f+g}=\underbrace{D_f}_{-۱\leq x\leq ۱}\cap \underbrace{D_g}_{۰\leq x}=[۰,۱]$

$\underbrace{۰\leq \sqrt{۱-x^۲}}_{\text{همواره}}\leq ۱$

$\sqrt{۱-x^۲}\leq ۱$
$۱-x^۲\leq ۱$
$۰\leq x^۲ \to ۰\leq x \xrightarrow{\cap D_f} -۱\leq x\leq ۱$

الف) $f(\frac{۳x+۱}{x-۲})=۴x+۵$

$\frac{۳x+۱}{x-۲}=t \to x=\frac{۲t+۱}{t-۳} \to f(t)=۴(\frac{۲t+۱}{t-۳})+۵=\frac{۸t+۴+۵t-۱۵}{t-۳}=\frac{۱۳t-۱۱}{t-۳}$

$\boxed{f(x)=\frac{۱۳x-۱۱}{x-۳}}$ ۹

ب) $f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})$

$x+\frac{۱}{x}=t \to f(t)=t^۳-۳t \Rightarrow \boxed{f(x)=x^۳-۳x}$

$g(۱)=۰$, $f(x)=x\sqrt{x}$

$g(۲\sqrt{۲})=۰$

$g\circ f(x)=۰ \to g(f(x))=۰ \longleftrightarrow$ $f(x)=۱ \to \underbrace{x\sqrt{x}}^{\sqrt{x^۳}}=۱ \to \boxed{x=۱}$ ؛ $f(x)=۲\sqrt{۲} \to x\sqrt{x}=۲\sqrt{۲} \to \sqrt{x^۳}=۲\sqrt{۲} \to \boxed{x=۲}$ ۱۰

$\boxed{|x_۲-x_۱|=۲-۱=۱}$