

به نام خدا

۲۵ عالی نوشتی

ونزار حاجی بابائی - یازدهم پسر B - تکلیف شماره ۹ - توابع و خواص آن‌ها

$$f(x) = \begin{cases} \cot \frac{\pi x}{2} & ; x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f \circ f \left(\frac{2}{3} \right) = f \left(f \left(\frac{2}{3} \right) \right)$$

(۲)

(۱)

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow f \left(\frac{2}{3} \right) = \cot \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3} \right) = \cot \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow f \circ f \left(\frac{2}{3} \right) \Rightarrow f \left(\underset{\sqrt{3}}{f \left(\frac{2}{3} \right)} \right) = f(\sqrt{3}) = 2 \Rightarrow \boxed{f \circ f \left(\frac{2}{3} \right) = 2} \quad \checkmark$$

$$f \left(\frac{1}{x} \right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \quad , \quad g(x) = 2 \cos^2 x \quad ; \quad f \circ g \left(\frac{x}{3} \right) = f \left(g \left(\frac{x}{3} \right) \right) \quad \text{(الف)}$$

$$g \left(\frac{x}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 = 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow g \left(\frac{x}{3} \right) = \frac{2}{9}$$

(۲)

(۷)

$$f \left(\frac{1}{3} \right) = \sqrt{\frac{2(\frac{2}{9}) - 1}{\left(\frac{2}{9} \right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f \left(g \left(\frac{x}{3} \right) \right) = f \left(\frac{2}{9} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f \circ g \left(\frac{x}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \checkmark$$

$$f(n) = [n] : g(n) = \frac{n}{1-n} : f \circ g(\sqrt{r}) = f(g(\sqrt{r})) \quad (ب)$$

$$g(\sqrt{r}) = \frac{\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} \Rightarrow f(g(\sqrt{r})) = f\left(\frac{\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\right) = \left[\frac{\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\right] = [-(r+\sqrt{r})]$$

$$\Rightarrow [-r-1, \infty) = [-3, \infty) = -\infty$$

$$\Rightarrow f \circ g(\sqrt{r}) = f\left(\frac{\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\right) = -\infty \quad \checkmark$$

(2)

$$f(n) = \sin n : g(n) = n\sqrt{1-n^2} : g \circ f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$g \circ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = \frac{\sqrt{r}}{r} \sqrt{1 - \frac{1}{r}} \Rightarrow \frac{\sqrt{r}}{r} \times \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{r} \Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow g \circ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = \frac{1}{r} \quad \checkmark$$

(2)

(3)

$$f(n) = \{(r, \omega), (y, \omega), (1, 12), (10, 12)\}$$

$$g(n) = \{(r, 4), (y, 5), (4, 1), (1, 10)\}$$

(2)

الف) $f \circ g(n)$

$$\begin{aligned} & \leftarrow \begin{array}{c} g(n) \\ \downarrow \\ f(n) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} f(n) \\ \downarrow \\ g(n) \end{array} \rightarrow \omega \\ & \begin{array}{c} \omega \\ \downarrow \\ 12 \end{array} \Rightarrow f \circ g(n) = \{(r, \omega), (y, 12), (1, 12), (r, \omega)\} \quad \checkmark \end{aligned}$$

(4)

ب) $g \circ f(n)$

$$\begin{aligned} & \leftarrow \begin{array}{c} f(n) \\ \downarrow \\ g(n) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} g(n) \\ \downarrow \\ f(n) \end{array} \rightarrow \phi \\ & \begin{array}{c} \omega \\ \downarrow \\ 12 \end{array} \Rightarrow g \circ f(n) = \phi \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \epsilon & \xrightarrow{f(n)} & \omega \xrightarrow{f(n)} \phi \\
 4 & \xrightarrow{f(n)} & \omega \xrightarrow{f(n)} \phi \Rightarrow f \circ f(n) = \phi \checkmark \\
 1 & \xrightarrow{f(n)} & 12 \xrightarrow{f(n)} \phi \\
 10 & \xrightarrow{f(n)} & 12 \xrightarrow{f(n)} \phi
 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{lcl}
 \epsilon & \xrightarrow{g(n)} & 4 \xrightarrow{g(n)} 1 \\
 2 & \xrightarrow{g(n)} & \epsilon \xrightarrow{g(n)} 4 \Rightarrow g \circ g(n) = \{(\epsilon, 1), (4, 4), (4, \epsilon) \} \\
 4 & \xrightarrow{g(n)} & 1 \xrightarrow{g(n)} 10 \\
 1 & \xrightarrow{g(n)} & 10 \xrightarrow{g(n)} \phi
 \end{array}$$

$$f = \{ (2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7) \} : g = \{ (1, 2), (5, 1), (a, c), (b, 1) \}$$

$$(4, 2) \in f \circ g : (4, 1) \in g \circ f$$

(2)

$$a = 4 \checkmark$$

(5)

$$\epsilon \xrightarrow{g(n)} \text{cloud} \xrightarrow{f(n)} 2 \Rightarrow \text{cloud} = 3 \Rightarrow (a, c) \text{ برابر با } \epsilon \text{ است}$$

$$\epsilon \xrightarrow{f(n)} \omega \xrightarrow{g(n)} 1 \Rightarrow (b, 1) \quad b = \omega \checkmark \text{ برابر با } \omega \text{ است}$$

$$\boxed{a=4} \quad \boxed{b=\omega} \Rightarrow \boxed{(a, b) = (4, \omega)} : \text{دو تایین } (a, b) \text{ برابر است با}$$

$$g(2n+3) = 3n-2 : f(f(n)) = 4n+3$$

چون در سوال گفته شده که f تابع از درجه اول است، پس f را به صورت $an+b$ در نظر می گیریم:

$$f(n) = an+b \Rightarrow f \circ f(n) = a(an+b) + b$$

$$\begin{array}{l}
 f \circ f(n) = a^2n + ab + b \\
 \Rightarrow f \circ f(n) = 4n + 3
 \end{array}
 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ ab + b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 2n + 3 &= -1 \\
 \Rightarrow 2n &= -4 \\
 \Rightarrow n &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 a = +2 \Rightarrow f(n) = 2n + 1 \xrightarrow{n=-1} = -1 \\
 a = -2 \Rightarrow f(n) = -2n - 3 \xrightarrow{n=-1} = +1
 \end{array}
 \Rightarrow f(-1) = -1 \quad (2) \quad (4)$$

$$n = -2 \Rightarrow g(-1) = -1 \Rightarrow \boxed{g \circ f(-1) = g(f(-1)) = g(-1) = -1} \checkmark$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sqrt{2x} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 5x} = \frac{1}{x(x-5)} \rightarrow f(x) \neq 0, f(x) \neq 5$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \leq 0$$

پس همه $x \leq 0$ از دامنه حذف خواهند شد.

$$\Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow \sqrt{x+|x|} = 5 \Rightarrow x+|x| = 25 \Rightarrow 2x = 25 \Rightarrow x = 12.5$$

پس $x = 12.5$ هم از دامنه حذف خواهد شد.

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = (0, 12.5) \cup (12.5, +\infty) = (0, +\infty) - \{12.5\}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, g(x) = \sqrt{x}$$

$$(f+g) \circ f = (f+g)(f(x)) = f(f(x)) + g(f(x))$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

برای اینکه $f(f(x))$ تعریف شود نیاز است ورودی f یعنی $f(x)$ در D_f باشد؛ اما

برای $x \in [-1, 1]$ مقدار $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ عددی بین 0 و 1 است پس $f(x) \in [0, 1] \subseteq [-1, 1]$

بنابراین $f(f(x))$ برای هر $x \in [-1, 1]$ قابل تعریف است.

برای اینکه $g(f(x))$ نیاز است $f(x) \geq 0$ باشد؛ باز هم برای همه $x \in [-1, 1]$ مقدار

$f(x)$ نامنفی است؛ پس $g(f(x))$ نیز برای همه $x \in [-1, 1]$ قابل تعریف است.

$$D_{(f+g) \circ f} = [-1, 1]$$

پس هیچ عددی بیرون از D_f پذیرفته نیست و همه x داخل

$[-1, 1]$ پذیرفته هستند. در نتیجه:

$$(a+b)^r = a^r + b^r + r ab(a+b) \Rightarrow a^r + b^r = (a+b)^r - r ab(a+b)$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

page: ()

$$\text{الف)} f\left(\frac{r^{n+1}}{n-r}\right) = (n+1)$$

$$\frac{r^{n+1}}{n-r} = t \Rightarrow \frac{rt+1}{t-r} = n$$

$$\Rightarrow f(t) = r\left(\frac{rt+1}{t-r}\right) + 1 \Rightarrow f(t) = \frac{rt+r}{t-r} + \frac{t-1}{t-r} = \frac{rt-1}{t-r}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{r^2 n - 1}{n - r}$$

$$\text{ب)} f\left(n + \frac{1}{n}\right) = n^r + \frac{1}{n^r} \Rightarrow f\left(n + \frac{1}{n}\right) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^r - r\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^r = n^r + \frac{1}{n^r} + r\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow n^r + \frac{1}{n^r} = \left(n + \frac{1}{n}\right)^r - r\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f(n) = n^r - r n$$

$$g \circ f(n) = 0 \Rightarrow g(f(n)) = 0 \quad \text{چون تابع } g \text{ محور } x \text{ را در نقاط } 1 \text{ و } 2\sqrt{2}$$

$$g(f(n)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(n) = 2\sqrt{2} \Rightarrow n\sqrt{n} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{n=2} \\ f(n) = 1 \Rightarrow n\sqrt{n} = 1 \Rightarrow \boxed{n=1} \end{cases}$$

قطع می‌کنند داریم:

در نتیجه طول مقاطعی که نمودار تابع $g \circ f(n)$ محور x را قطع می‌کند 1 و 2 است.

اختلاف طول این نقاط برابر است با $2 - 1 = 1$. بنابراین جواب: 1