

در تابع $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{4} & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $f \circ f(\frac{1}{2})$ را بیابید.

$$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(\sqrt{\frac{1}{2}}) \Rightarrow \sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}} + 1} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

با توجه به تعاریف زیر مقدار خواسته شده را بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2 \cos^2 x$ مقدار $f \circ g(\frac{\pi}{4})$ را بیابید.

$$\Rightarrow \sqrt{f(g(\frac{\pi}{4}))} = \sqrt{f(2 \cos^2(\frac{\pi}{4}))} = \sqrt{f(2 \cdot \frac{1}{2})} = \sqrt{f(1)} = \sqrt{\sqrt{1-1}} = \sqrt{0} = 0$$

ب) اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ مقدار $f \circ g(\sqrt{2})$ را بیابید.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2} + 2}{-1} = -\sqrt{2} - 2 \Rightarrow f(-\sqrt{2} - 2) = \lfloor -\sqrt{2} - 2 \rfloor = -3$$

اگر $F(x) = \sin x$ و $g(x) = x \sqrt{1-x^2}$ مقدار $g \circ f(\frac{\pi}{4})$ را بیابید.

$$g(f(\frac{\pi}{4})) \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g(\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{2}{4}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

فرض کنید $F(x) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$ و $g(x) = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ حاصل مقادیر زیر را بیابید.

الف) $f \circ g(x) = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$

ب) $g \circ f(x)$ ندارد

ج) $f \circ f(x)$ ندارد

د) $g \circ g(x) = \{(2,3), (3,4), (4,5)\}$

فرض کنید $F = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$ و $g = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ مقادیر زیر را بیابید.

الف) $(4,2) \in f \circ g \Rightarrow (4, \pi) \xrightarrow{F(x)} (\pi, 2) \Rightarrow a = \pi$

ب) $(4,1) \in g \circ f \Rightarrow (4, \pi) \xrightarrow{g(x)} (\pi, 1) \Rightarrow b = \pi$

ج) $(a, b) \Rightarrow (4, \pi) \Rightarrow$ جواب

اگر F و G توابعی خطی باشند به گونه ای که $F(F(x)) = \epsilon x + \psi$ و $G(yx + \psi) = \psi x - \gamma$ در این صورت

$$\gamma x + \psi = \epsilon \Rightarrow x = \frac{\epsilon - \psi}{\gamma}$$

حاصل $g \circ f(-1)$ را بیابیم

$$\psi \left(\frac{\epsilon - \psi}{\gamma} \right) = \frac{\psi \epsilon - \psi^2}{\gamma} \Rightarrow \frac{\psi \epsilon - \psi^2}{\gamma} = \frac{\psi x - \gamma}{\gamma} \Rightarrow g(1) = \frac{\psi x - \gamma}{\gamma}$$

اگر $a(x+b) = \epsilon x + \psi \Rightarrow a(ax+b) + b = \epsilon x + \psi \Rightarrow a^2 x + ab + b = \epsilon x + \psi \Rightarrow a = \pm \gamma$

$$\begin{cases} a = \gamma \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \gamma x + 1 \xrightarrow{\gamma(-1)} 1 - \gamma \Rightarrow g(1) = -\Delta \\ a = -\gamma \Rightarrow b = -\gamma \Rightarrow -\gamma x - \gamma \xrightarrow{\gamma(-1)} -\gamma - \gamma \Rightarrow g(-1) = -9 \end{cases} \Rightarrow g \circ f(-1) = \frac{9\epsilon - \Delta}{\gamma}$$

اگر $F(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - \epsilon x}$ بیابیم $g \circ f$ دامنه تابع

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f : F(x) \in D_g \right\}$$

$$\sqrt{x+|x|} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{x+|x|} \neq \epsilon \Rightarrow x+|x| \neq \epsilon^2 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \quad (2) \\ x \neq -1 \Rightarrow x \neq -1 \quad (3) \end{cases}$$

$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

اگر $F(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ بیابیم $(F+g)$ دامنه تابع

$$D_{F+g} = \left\{ x \in D_f : F(x) \in D_g \right\} \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_{F+g} = [-1, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f : F(x) \in D_g \right\} \Rightarrow \sqrt{1-x} > 0 \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \leq 1$$

$D_{g \circ f} = [-1, 1] \Rightarrow D_{(F+g) \circ f} = [-1, 1] \rightarrow$

در رابطه داده شده $F\left(\frac{\psi x + 1}{x - \gamma}\right) = \epsilon x + \Delta \Rightarrow \frac{\psi x + 1}{x - \gamma} = \frac{\epsilon x + \Delta}{\epsilon - \psi}$ بیابیم Δ

$$\psi \left(\frac{\epsilon x + 1}{\epsilon - \psi} \right) = \frac{\epsilon x + \Delta}{\epsilon - \psi} \Rightarrow \frac{\psi \epsilon x + \psi}{\epsilon - \psi} = \frac{\epsilon x + \Delta}{\epsilon - \psi} \Rightarrow \frac{\psi \epsilon - 11}{\epsilon - \psi} \Rightarrow F(x) = \frac{\psi x - 11}{x - \psi}$$

ب) $F\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^2} + 3x \times \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^2} = \epsilon^3 - \epsilon$

$\Rightarrow x^3 - \psi x = \frac{1}{x^2} - \epsilon$

نقطه دار تابع g معر x که در نقاط به شکل $\sqrt{x}$ و $\sqrt{x}$ قطع کند از $F(x) = \sqrt{x+|x|}$ است

نقطه g که معر x که در نقاط به شکل $\sqrt{x}$ و $\sqrt{x}$ قطع کند از $F(x) = \sqrt{x+|x|}$ است

$$g(1) = 0 \Rightarrow F(x) = 1 \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$g(2\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow x\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = 4$

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$