

📖 ضمیمه ۱: (ریشه‌های معادله درجه دوم)

می‌دانید ریشه جایی است که منفی، محور x ها را قطع می‌کند در اصطلاح به این نقاط صفرهای تابع نیز می‌گویند. برای پیدا کردن ریشه‌های معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ در حالت کلی از پندین روش مختلف می‌توان کمک گرفت...

✱ **حل به روش مربع کامل:** سعی می‌کنیم با افزودن یا کاستن مقداری ثابت معادله را به یک افتاد مربع کامل تبدیل کنیم.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 1 \rightarrow (x - 2)^2 = 1 \rightarrow x - 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

یا در یک مثال دیگر ...

$$x^2 - 6x - 6 = 0 \xrightarrow{+9} x^2 - 6x + 9 = 15 \rightarrow (x - 3)^2 = 15 \rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{15} \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{15}$$

✱ **حل به روش جمله مشترک:** گاهی در حل معادله درجه دوم می‌توان از افتاد جمله مشترک کمک گرفت. می‌دانید در این حالت ضریب x برابر جمع اعداد داخل پرانتز و عدد ثابت برابر ضرب آن دو عدد است. به عنوان مثال...

$$\begin{array}{c} \text{مجموع اعداد داخل پرانتز} \\ \downarrow \\ x^2 + 8x + 12 = 0 \rightarrow (x + 6)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -6 \end{cases} \\ \uparrow \\ \text{حاصل ضرب اعداد داخل پرانتز} \end{array}$$

البته جور دیگر ای هم همیشه جمله مشترک رو بیان کرد. در این حالت معادله را به فرم $x^2 - Sx + P = 0$ می‌نویسیم؛ آنگاه S برابر مجموع ریشه‌ها و P حاصل ضرب ریشه‌هاست. مثلاً در معادله درجه دوم $x^2 + 8x + 12 = 0$ باید به دنبال ریشه‌هایی باشیم که مجموع آن‌ها برابر -8 و حاصل ضرب آن‌ها $+12$ است یعنی: $x = -2$ و $x = -6$.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{یک مثال دیگر هم ببینید بر نیست...}$$

حال می‌فهمیم در مورد حل به روش جمله مشترک برای معادله‌ی درجه دومی صحبت کنیم که در آن x^2 ضریبی غیر از ۱ داشته باشد. به عنوان مثال معادله‌ی $2x^2 + 3x - 2 = 0$ را در نظر بگیرید، برای حل به روش جمله مشترک باید کل معادله را در عدد ۲ ضرب کنیم تا جمله‌ی اول به فرم یک مربع کامل در بیاید، فقط حواستان باشد برای تشخیص دو عدد داخل پرانتز باید ضریب x در معادله‌ی اولیه را به ضریب x در حالت تمیزه شده تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{c} \frac{3}{2} = 1.5 \text{ مجموع دو عدد داخل پرانتز} \\ \downarrow \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\times 2} 4x^2 + 6x - 4 = 0 \rightarrow (2x + 4)(2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \uparrow \\ \text{حاصل ضرب دو عدد داخل پرانتز} \end{array}$$

✱ **حل به روش دلتا:** در این روش برای حل معادله‌ی درجه دو از فرمول زیر کمک می‌گیریم. به جورایی همون مربع کامله فقط فرمولیزه شده...

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 16 - 12 = 4} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

مال فرمول دلتا را اثبات می‌کنیم...

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \xrightarrow{+\frac{b^2}{4a^2}} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

این هم فرمول دلتا (Δ)

◀ اگر دلتا منفی باشد؛ معادله جوابی در مجموعه اعداد حقیقی ندارد.

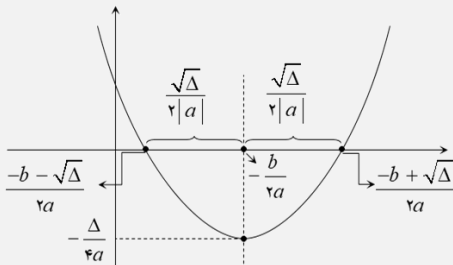
◀ اگر دلتا برابر صفر باشد معادله دارای دو ریشه مساوی یا یک ریشه مضاعف است.

◀ اگر دلتا مثبت باشد؛ معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

به کمک فرمول می‌توان فرمول جمع، ضرب و تفاضل ریشه‌ها را اثبات کرد.

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha \times \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$



یک معادله درجه دوم منبسط‌دار ($a > 0$) با دو ریشه برایتان رسم کردیم، خیلی خیلی با دقت نگاه کنید.

✱ حل به کمک دو نکته‌ی معروف: ($ax^2 + bx + c = 0$)

✎ اگر در معادله درجه دوم داشته باشیم $a + b + c = 0$ ، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است. البته با توجه

به اینکه ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است برعکسست که وقتی یکی از ریشه‌ها ۱ است، ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ خواهد بود.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

✎ اگر در معادله درجه دوم داشته باشیم $a + c = b$ ، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است. اثبات این

نکته نیز بسیار ساده است. قطعاً با توجه به ضرب ریشه‌ها وقتی یک ریشه -۱ است دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

تنبیه اخلاقی: پس یعنی مثلاً اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه دو عدد ۵ باشد، ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{5a}$ خواهد بود.

$$5 \times ? = \frac{c}{a} \Rightarrow ? = \frac{c}{5a}$$

❖ **روش روسی:** این روش که به روش روسی معروف است اصولاً زمانی کاربرد دارد که a عدد غیر یک باشد یا مثلاً ضرایب بزرگ باشند. برای حل به این روش ابتدا a را در c ضرب می‌کنیم و به جای c می‌نویسیم (ضریب x^2 ، یک می‌شود). سپس به کمک یکی از روش‌های گفته شده ریشه‌های معادله‌ی جدید را پیدا می‌کنیم و در نهایت جواب‌های به دست آمده را به a تقسیم می‌کنیم. در لنگور دی سال ۱۴۰۱، رشته‌ی تجربی، تستی وجود داشت که به کمک این روش به سادگی حل می‌شد...
مثال‌های زیر را ببینید...

$$\begin{array}{c} \times \\ \curvearrowright \\ 15x^2 + 73x + 14 = 0 \end{array} \rightarrow x^2 + 73x + 210 = 0 \rightarrow (x + 70)(x + 3) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{70}{15} = -\frac{14}{3} \\ x = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \times \\ \curvearrowright \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 \end{array} \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{2} = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

❖ **روش ضریب فرضی k :** گاهی اوقات معادله به گونه‌ای است که با تبدیل ضرایب کار ساده‌تر خواهد شد. اگر معادله را بصورت $ax^2 + bx + c = 0$ فرض کنیم و معادله‌ی جوری باشد که b به عدد فرضی k و c به k^2 بخش پذیر باشد معادله را بعد از ساده کردن ضرایب به k و k^2 (به ترتیب) بازنویسی می‌کنیم و معادله‌ی جدید را به روش دلفوا حل می‌کنیم سپس ریشه‌های به دست آمده را در عدد k ضرب می‌کنیم. حال مثال‌های زیر را ببینید...

$$\begin{array}{c} x^2 - 6x - 216 = 0 \\ \div 6 \downarrow \quad \downarrow \div 36 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{array} \rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \xrightarrow{\times 6} x = 18 \\ x = -2 \xrightarrow{\times 6} x = -12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} x^2 - 54x + 504 = 0 \\ \div 3 \downarrow \quad \downarrow \div 9 \\ x^2 - 18x + 56 = 0 \end{array} \rightarrow (x - 4)(x - 14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \xrightarrow{\times 3} x = 12 \\ x = 14 \xrightarrow{\times 3} x = 42 \end{cases}$$

حال در این قسمت تعدادی معادله‌ی درجه دوم برایتان نوشتیم و هر کدام را به بهترین روشی که به نظرمان رسید حل کرده‌ایم. سعی کنید اول خودتان معادله‌ها را حل کنید سپس با راه ما چک کنید:

$$۶۶۶) x^2 - 6x + 5 = 0.$$

$$۶۶۷) x^2 + 6x + 5 = 0.$$

$$۶۶۸) x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$$۶۶۹) x^2 + 5x + 6 = 0.$$

$$۶۷۰) x^2 + 5x + 2 = 0.$$

$$۶۷۱) x^2 + 3x + 1 = 0.$$

$$۶۷۲) x^2 + 2x + 3 = 0.$$

$$۶۷۳) 6x^2 - 7x + 2 = 0.$$

$$۶۷۴) 2x^2 + 2x - \frac{15}{2} = 0.$$

$$۶۷۵) x^2 - x = 0.$$

$$۶۷۶) x^2 - 5x - 14 = 0.$$

$$۶۷۷) x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$۹۵۰) x^2 + 20x + 96 = 0.$$

$$۹۵۱) x^2 - 6x - 72 = 0.$$

$$۶۶۶) x^2 - 6x + 5 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = 5 \end{cases}$$

$$۶۶۷) x^2 + 6x + 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = -5 \end{cases}$$

$$۶۶۸) x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$۶۶۹) x^2 + 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x+3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$۶۷۰) x^2 + 5x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{روش دلتا}} \Delta = 17 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$۶۷۱) x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{روش دلتا}} \Delta = 5 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$۶۷۲) x^2 + 2x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{روش دلتا}} \Delta = -8 \Rightarrow \text{فاقد ریشه‌ی حقیقی}$$

$$۶۷۳) 6x^2 - 7x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{روش روسی}} x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$۶۷۴) 2x^2 + 2x - \frac{15}{2} = 0 \xrightarrow{\times 2} 4x^2 + 4x - 15 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (2x+5)(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$۶۷۵) x^2 - x = 0 \xrightarrow{\text{فکتورگیری ساده}} x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$۶۷۶) x^2 - 5x - 14 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-7)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$۶۷۷) x^2 - 4x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{مربع کامل}} (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$۹۵۰) x^2 + 20x + 96 = 0 \xrightarrow{k \text{ روش}} x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \xrightarrow{\times 4} x = -8 \\ x = -3 \xrightarrow{\times 4} x = -12 \end{cases}$$

$$۹۵۱) x^2 - 6x - 72 = 0 \xrightarrow{k \text{ روش}} x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow (x+2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \xrightarrow{\times 3} x = -6 \\ x = 4 \xrightarrow{\times 3} x = 12 \end{cases}$$